

Max e min su insiemi non compatti

$$f: A \rightarrow \mathbb{R}, A \subseteq \mathbb{R}^n$$

$$\inf / \sup / \max / \min \{ f(x) : x \in A \}$$

TEOREMA (Weierstrass generalizzato)

Sia $D \subseteq \mathbb{R}^n$ e sia $f: D \rightarrow \mathbb{R}$.

Supponiamo che

(i) f è continua

(ii) esiste un sottolivello non vuoto e compatto, cioè esiste $M \in \mathbb{R}$ tale che

$$K_M = \{ x \in D : f(x) \leq M \} \leftarrow \text{sottolivello}$$

è non vuoto e compatto.

Allora

$$\min \{ f(x) : x \in D \}$$

esiste per forza.

Oss. Se voglio che esista il max, basta usare il sopralivello

Dim. Per W. classico esiste

$$\min \{ f(x) : x \in K_M \}$$

Sia x_0 un p.to di minimo in K_M . Dico che x_0 è p.to di min. per tutto D . Infatti:

- se $x \in K_M$, allora $f(x) \geq f(x_0)$ (per def. di x_0)
- se $x \in D \setminus K_M$, allora

$$f(x) > M \geq f(x_0)$$

$\uparrow$ per def. di K_M $\uparrow$ perché $x_0 \in K_M$

Quindi in ogni caso
 $f(x) \geq f(x_0) \quad \forall x \in D.$

□

Corollario Supponiamo $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ continua e

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

Allora esiste il minimo.

Dim. Basta dim. che esiste un sottoinsieme non vuoto e compatto.

Scelgo $x_0 \in \mathbb{R}^n$ a caso (ad esempio $x_0 = 0$) e pongo
 $M = f(x_0)$.

Il corrispondente sottoinsieme è

- $\neq \emptyset$ perché contiene x_0 ,
- chiuso perché controimmagine di un chiuso $(-\infty, M]$
- limitato perché per definizione di limite

$$\exists R > 0 \text{ t.c. } f(x) \geq M+1 \quad \forall x \text{ t.c. } |x| \geq R$$

quindi

$$K_M \subseteq B_R(0)$$

Conclusione $K_M \neq \emptyset$ e compatto. $\square$

— o — o —

Esempio 1 $f(x, y) = x^2 + 2y^2 \quad D = \mathbb{R}^2$

$$\underbrace{f(x, y)}_{\downarrow +\infty} \geq \underbrace{x^2 + y^2}_{\downarrow +\infty}$$

Siamo nelle ipotesi del corollario $\Rightarrow$ minimo esiste (si vede a occhio che è in $(0, 0)$).

Dal limite segue anche che $\sup = +\infty$.

Esempio 1-bis $f(x, y) = x^2 + 2y^2 + 7 \sin x \quad D = \mathbb{R}^2$

$\sup = +\infty$ (banalmente) e il min. esiste perché

$$f(x, y) \geq \underbrace{x^2 + y^2}_{\downarrow +\infty} - 7 \quad \text{e quindi siamo nelle Hp del coroll.}$$

Esempio 2

$$f(x,y) = x^2 - 2y^2 \quad D = \mathbb{R}^2$$

$$\text{Sup} = +\infty$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t,0) = \lim_{t \rightarrow +\infty} t^2 = +\infty$$

$$\text{inf} = -\infty$$

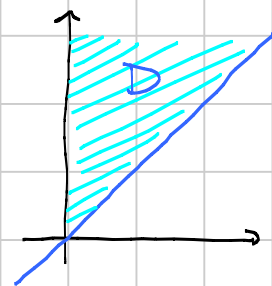
$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(0,t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} -2t^2 = -\infty$$

Esempio 3

$$f(x,y) = x^2 - 2y^2 \quad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq x\}$$

$$\text{Inf} = -\infty$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(0,t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} -2t^2 = -\infty$$



Dico che esiste max e vale 0

1° modo Dimostrazione diretta

$$f(x,y) \leq x^2 - 2x^2 = -x^2 \leq 0 \quad \text{per ogni } (x,y) \in D$$

$\uparrow$
 $y \geq x$

e vale il segno di uguale se e solo se $y = x = 0$

2° modo Se voglio usare W. gen. devo dimostrare che

$$\lim_{\substack{x^2+y^2 \rightarrow +\infty \\ (x,y) \in D}} f(x,y) = -\infty$$

Come lo dimostro? Vedo almeno 2 possibilità

$$\boxed{1} \text{ Coord. polari: } f(x,y) = \rho^2 (\cos^2 \theta - 2 \sin^2 \theta) \\ = \rho^2 (1 - 3 \sin^2 \theta)$$

Ora $\theta \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$ e quindi $\frac{1}{2} \leq \sin^2 \theta \leq 1$, ma allora

$$\underbrace{f(x,y)}_{-\infty} \leq \rho^2 \left(1 - \frac{3}{2}\right) = \underbrace{-\frac{1}{2} \rho^2}_{-\infty}$$

② Truccoso :

$$\begin{aligned}
 f(x, y) &= x^2 - 2y^2 \\
 &= \underbrace{x^2 - y^2}_{\leq 0} - \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}y^2 \\
 &\leq -\frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}y^2 \\
 &\quad \uparrow y^2, x \\
 &\leq -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2 \\
 &= -\frac{1}{2}(x^2 + y^2) \\
 &\quad \downarrow -\infty
 \end{aligned}$$

valgono solo perché siamo in D

Una volta che so che max esiste, allora il p.to di max si trova nelle solite 3 categorie

→ staz. e sing. interni non esistono

→ bordo è fatto da 2 pezzi

① $\{(0, t) : t \geq 0\}$

② $\{(t, t) : t \geq 0\}$

Esempio 4

$$f(x, y) = x^2 - 2y^2$$

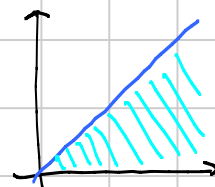
$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq x\}$$

Sup = $+\infty$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t, 0) = +\infty$$

inf = $-\infty$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t, t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} -t^2 = -\infty$$



Esempio 5

$$f(x, y) = x^2 + \arctan(xy)$$

$$D = \mathbb{R}^2$$

Sup = $+\infty$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t, 0) = +\infty$$

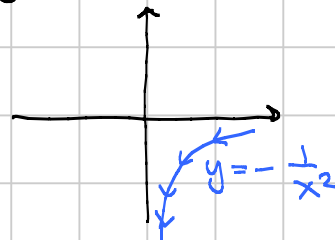
che è l'inf. teorico

inf ≤ 0

perché $f(0, 0) = 0$

Punto a $-\frac{\pi}{2}$: serve x molto vicino a 0, e $xy \sim -\infty$

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t, -\frac{1}{t^2}) = \lim_{t \rightarrow 0^+} t^2 + \arctan(-\frac{1}{t}) = -\frac{\pi}{2}$$



Esempio 6 Dimostrare la disuguaglianza tra media aritmetica e quadratiche

$$\frac{x_1 + \dots + x_n}{n} \leq \sqrt{\frac{x_1^2 + \dots + x_n^2}{n}}$$

o equivalentemente

$$x_1 + \dots + x_n \leq \sqrt{n} \cdot \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$$

Abbiamo 2 opzioni basate sul fatto che è omogenea.

$$\rightarrow \text{Fare } \max \left\{ \underbrace{x_1 + \dots + x_n}_{\neq} : \underbrace{x_1^2 + \dots + x_n^2}_{\neq} = 1 \right\}$$

$$\rightarrow \text{Fare } \min \{ x_1^2 + \dots + x_n^2 : x_1 + \dots + x_n = 1 \}$$

La prima è migliore perché il vincolo è compatto, quindi max esiste. A quel punto uso i moltiplicatori

$$\nabla f = \lambda \nabla \phi$$

$$1 = 2\lambda x_1$$

$$1 = 2\lambda x_2$$

$$\vdots$$

$$1 = 2\lambda x_n$$

$$\left. \begin{array}{l} 1 = 2\lambda x_1 \\ 1 = 2\lambda x_2 \\ \vdots \\ 1 = 2\lambda x_n \end{array} \right\} \Rightarrow x_1 = \dots = x_n \text{ e a quel punto li trovo con il vincolo.}$$

— o — o —