

Moltiplicatori di Lagrange (caso con più moltiplicatori)

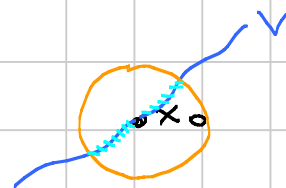
Setting: $V \subseteq \mathbb{R}^n$ descritto come luogo di zeri di più funzioni

$$V = \{x \in \mathbb{R}^n : \underbrace{\Phi_1(x) = \Phi_2(x) = \dots = \Phi_k(x) = 0}_{k \text{ equazioni che descrivono } V}\}$$

Def. Dato V come sopra e data $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, dico che $x_0 \in V$ è p.to di max / min locale per f in V se

$$\exists \delta > 0 \text{ t.c. } f(x) \geq f(x_0) \quad \forall x \in B_\delta(x_0) \cap V$$

$\uparrow$
caso minimo



Teorema (misterioso) Supponiamo che x_0 sia p.to di max / min per f ristretta a V .

Supponiamo che $f(x), \Phi_1(x), \dots, \Phi_k(x)$ siano differenziabili in $B_\delta(x_0)$. Allora x_0 rientra in una di queste due categorie:

→ $\nabla \Phi_1(x_0), \dots, \nabla \Phi_k(x_0)$ sono k vettori LINEARMENTE DIPENDENTI, cioè equivalentemente la matrice che li ha come righe (o colonne) ha rango $\leq k-1$

→ $\nabla f(x_0)$ è combinazione lineare di $\nabla \Phi_1(x_0), \dots, \nabla \Phi_k(x_0)$, cioè esistono numeri reali $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ t.c.

$$\nabla f(x_0) = \lambda_1 \nabla \Phi_1(x_0) + \dots + \lambda_k \nabla \Phi_k(x_0)$$

$\lambda_1, \dots, \lambda_k$ sono i moltiplicatori

Operativamente:

→ i punti del primo tipo li ottengo risolvendo il 1° sistema

$$\phi_1 = \phi_2 = \dots = \phi_k = 0$$

← k equazioni

tutti i minori $k \times k$ della
matrice con righe $\nabla \phi_i$
siano nulli

← $\binom{n}{k}$ equazioni

n incognite
equas. esagerate
⇒ in genere
no soluzioni

→ i p.ti del secondo tipo li ottengo risolvendo il 2° sistema

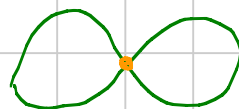
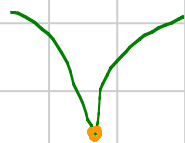
$$\phi_1 = \phi_2 = \dots = \phi_k = 0 \quad \leftarrow k \text{ equazioni}$$

$$\nabla \phi = \lambda_1 \nabla \phi_1 + \dots + \lambda_k \nabla \phi_k \quad \leftarrow n \text{ equazioni, una per componenti}$$

$k+n$ equazioni e $k+n$ incognite (n componenti di x e k moltiplicatori) $\leadsto$ ragionevole avere # finito di soluzioni.

Brutalmente: i p.ti del secondo tipo sono i p.ti in cui è tangente agli insiemi di livello di ϕ .

I p.ti del 1° tipo sono i p.ti in cui V può essere "fatto male", cioè avere cuspidi, intersezioni di vari rami, e così via.



Esempi Già con una sola funzione.

$$\phi(x,y) = 0$$

$$xy = 0$$



$$\nabla \phi(x,y) = (y, x)$$

L'origine soddisfa il 1° sistema

$$\phi = 0 \quad \nabla \phi = (0,0)$$

$$\phi(x,y) = 0$$

$$x^2 = 0$$

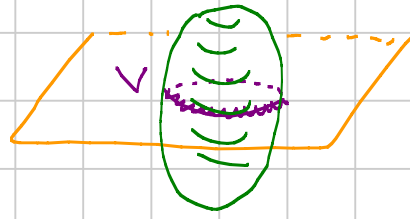


Tutti i p.ti di V sono soluz. del
1° sistema

Esempio 1 $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \underbrace{x^2 + 2y^2 + z^2 = 4}_{\text{ellissoide}}, \underbrace{x + y + z = 1}_{\text{piano}}\}$

$$f(x, y, z) = z + x^2$$

max / min di f su V



V è compatto: $\rightarrow$ è limitato perché contenuto in una sfera, o ancora meglio nel cubo $[-2, 2]^3$
 $\rightarrow$ è chiuso perché è intersezione di chiusi perché sono controimmagini di un pto (chiuso) wrt una funzione continua.

$W \Rightarrow$ max e min esistono, quindi basta trovare i candidati

$$\Phi_1(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + z^2 - 4 = 0$$

$$\Phi_2(x, y, z) = x + y + z - 1$$

1° sistema $\begin{pmatrix} \nabla \Phi_1 \\ \nabla \Phi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & 4y & 2z \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ Devo dim. che ha rango 2 nei pti di V

Se ha rango 1 vuol dire che

$$\begin{cases} 2x - 4y = 0 \\ 2x - 2z = 0 \\ 4y - 2z = 0 \end{cases} \quad \left. \begin{array}{l} \text{annullamento dei} \\ \text{3 minori} \end{array} \right\}$$

$$\begin{cases} x^2 + 2y^2 + z^2 = 4 \\ x + y + z = 1 \end{cases} \quad \left. \begin{array}{l} \text{stare in } V \end{array} \right\}$$

$$x = 2y$$

$$x = z$$

$$z = 2y$$

$$x = z = 2y$$

$\downarrow$ piano

$$x = \frac{2}{5} \quad y = \frac{1}{5}$$

$$z = \frac{2}{5}$$

$$\frac{4}{25} + \frac{2}{25} + \frac{4}{25} = 4$$

$\uparrow$ No $\Rightarrow$ nessuna soluzione

$\swarrow$ Sostituisco nell'ellissoide

2° sistema $\nabla f = \lambda \nabla \Phi_1 + \mu \nabla \Phi_2$

$$f(x, y, z) = z + x^2$$

$$\begin{cases} 2x = 2\lambda x + \mu \\ 0 = 4\lambda y + \mu \\ 1 = 2\lambda z + \mu \\ \Phi_1 = \Phi_2 = 0 \end{cases}$$

$$2^a - 3^a : 4\lambda y - 2\lambda z = -1$$

$$2\lambda(2y - z) = -1$$

$$1^a - 2^a : 2x = 2\lambda x - 4\lambda y$$

$$x = \lambda x - 2\lambda y$$

Provo ad eliminare λ usando le 2 equ. ottenute

$$\lambda = \frac{-1}{2(2y-z)} = \frac{x}{x-2y}$$

↑
posso dividere...

Dividendo nella seconda
devo stare attento a non
perdere soluzioni (nel video
c'è)

Restano 3 equazioni in x, y, z

$$\begin{cases} 2y - x = 2x(2y - z) \\ x^2 + 2y^2 + z^2 = 4 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

→ spero di risolvere

Oss. Supponiamo di avere $\begin{cases} x^2 + 2y^2 + z^2 = 4 \\ x + y + z = a \end{cases}$

Quando il 1° sistema ha soluzione? Quando l'ellissoide è
tangente al piano

— o —

Oss. Le soluzioni del 2° sistema sono i pti stazionari non
vincolati per la funzione

$$F(x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_k) = f(x) - \lambda_1 \phi_1 - \dots - \lambda_k \phi_k.$$

— o — o —