

Interpretazione brutale del metodo dei moltiplicatori

$$\max / \min \{ x^2 + 2y^2 : \underline{x^4 + y^4 = 1} \}$$

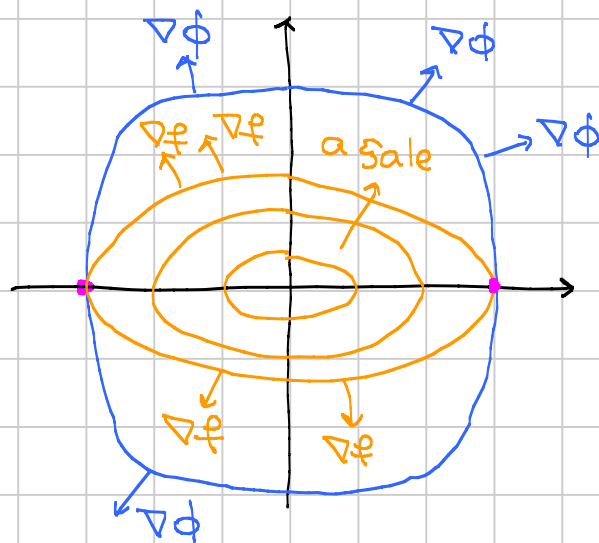
solo bordo

Sto cercando le linee di Livello di $f(x)$ che risultano TANGENTI all'insieme V .

Ora il fatto geometrico è questo:

IL GRADIENTE È PERPENDICOLARE alle linee di Livello

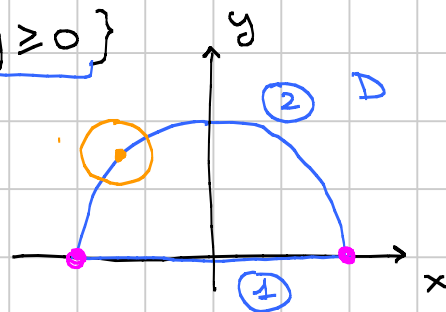
Nei pti di tangenza le linee di Livello di f e ϕ sono tangenti, quindi $\nabla\phi$ e ∇f sono perpendicolari alla stessa cosa e dunque uno multiplo dell'altro.

UTILIZZO MISTO DI MOLTIPLICATORI E ALTRE TECNICHE

Esempio $\max / \min \{ x + 2y : \underline{x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0} \}$

D

D compatto, f continua $\overset{w}{\Rightarrow}$ max e min esistono



→ Stat. e arg. interni : $\emptyset$

→ Bordo : sono 2 pezzi

Per il pezzo ① uso la param. $\{ (t, 0) : t \in [-1, 1] \}$

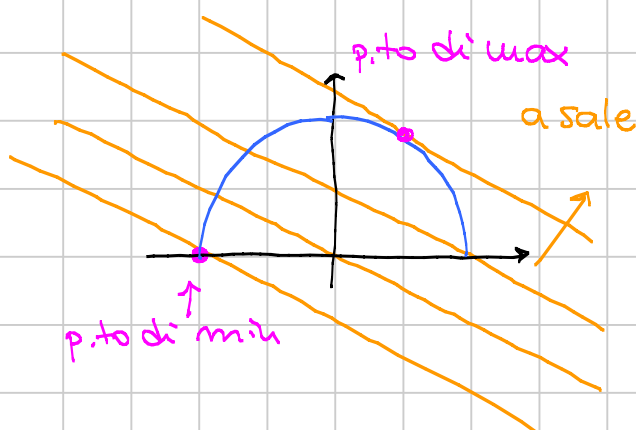
$f(t, 0) = t$ che studio per $t \in [-1, 1] \rightsquigarrow$ trovo $(\pm 1, 0)$

Sul pezzo 2 vorrei usare i moltiplicatori con $\phi(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ ma questa sarebbe tutta la circ.

Questo si può fare MA occorre

- ① scartare i candidati che hanno $y < 0$
- ② includere d'ufficio i "BORDI DEI BORDI", altrimenti detti PUNTI DI TAGLIO, cioè gli estremi del pezzo di bordo che sto considerando, cioè $(\pm 1, 0)$

Facendo i conti, il p.to di max esce dal 2° sistema dei moltiplicatori



— 0 — 0 —

Esempio 2 $\max / \min \{ x - 2y : x^2 = y^3, x \in [-1, 1] \}$
 D compatto con $\text{Int}(D) = \emptyset$

L'equazione di D è $\underbrace{x^2 - y^3 = 0}_{\Phi(x,y)}$

1° sistema :

$$\begin{cases} \Phi_x = 0 \\ \Phi_y = 0 \\ \Phi = 0 \end{cases} \begin{cases} 2x = 0 \\ -3y^2 = 0 \\ x^2 = y^3 \end{cases} \leadsto \text{ha come soluz. } (0,0)$$

2° sistema

$$\begin{cases} f_x = \lambda \Phi_x \\ f_y = \lambda \Phi_y \\ \Phi = 0 \end{cases} \begin{cases} 1 = 2\lambda x \\ -2 = -3\lambda y^2 \\ x^2 = y^3 \end{cases} \begin{array}{l} \leadsto \text{ricavo } x \\ \leadsto \text{ricavo } y \end{array}$$

Alternativa: divido le prime 2 equazioni : $-\frac{1}{2} = -\frac{2}{3} \frac{x}{y^2}$
 da cui

$$x = \frac{3}{4} y^2$$

sostituisco nella 3ª

$$\frac{9}{16} y^4 = y^3$$

$$\uparrow y = 0 \leadsto x = 0$$

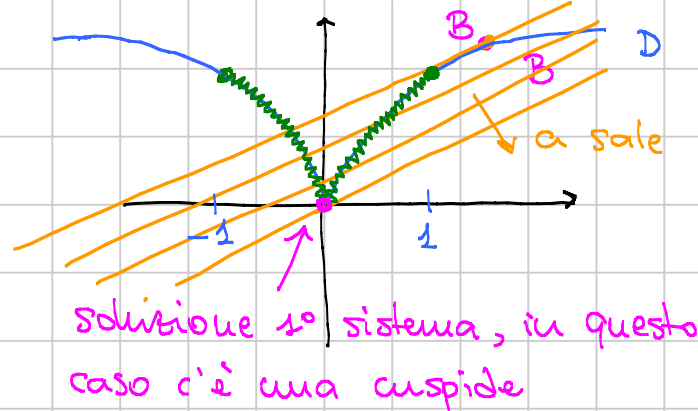
$$\leadsto y = \frac{16}{9} \leadsto x = \frac{3}{4} \frac{256}{81}$$

Il secondo candidato è $\left(\frac{64}{27}, \frac{16}{9} \right) = B$ $= \frac{64}{27}$

$\uparrow$
 $x > 1$
 $\uparrow$ eliminato

$$x - 2y = a \quad y = \frac{1}{2}x - \frac{a}{2}$$

Devo includere d'ufficio i p.ti di taglio
 $(\pm 1, 1)$



Riassumendo ho 3 candidati

$$\begin{aligned} \leadsto (1, 1) &\leadsto f(1, 1) = -1 \\ \leadsto (-1, 1) &\leadsto f(-1, 1) = -3 \leftarrow \text{MIN} \\ \leadsto (0, 0) &\leadsto f(0, 0) = 0 \leftarrow \text{MAX} \\ &\quad \text{---} 0 \text{---} 0 \text{---} \end{aligned}$$

Esercizio 3 Sia A una matrice simmetrica. Sia $q(x) = \langle Ax, x \rangle$ la forma quadratiche ad essa associata. Calcolare max/min di $q(x)$ sui vettori di norma 1, cioè

$$\max / \min \left\{ \underbrace{q(x)}_{f(x)} : \underbrace{|x| = 1}_V \right\}$$

Una possibile eq. per V è $|x| - 1 = 0$, ma meglio è

$$\underbrace{|x|^2 - 1}_{\phi(x, y)} = 0$$

Max e min esistono grazie a Weierstrass. Li cerco via moltiplicatori. Sennò $\nabla f(x)$ e $\nabla \phi(x)$ che abbiamo fatto in una lezione precedente:

$$\nabla f(x) = 2Ax \quad (\text{in generale } (A + A^T)x)$$

$$\nabla \phi(x) = 2x$$

$$\boxed{1^\circ \text{ sistema}} \begin{cases} \nabla \phi = 0 \\ \phi = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x = 0 \\ |x|^2 = 1 \end{cases} \quad \text{impossibile}$$

2° sistema

$$\begin{cases} \nabla \phi = \lambda \nabla \Phi \\ \phi = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \cancel{2} Ax = \cancel{2} \lambda x \\ |x| = 1 \end{cases}$$

Sorprendenza: i p.ti stazionari sono gli autovettori (normalizzati in modo da stare in V) e i corrispondenti moltiplicatori di Lagrange sono i con. autovalori.

Quando sostituisco in $q(x)$ un autovettore trovo

$$q(x) = \langle Ax, x \rangle = \lambda \langle x, x \rangle = \lambda$$

In conclusione : $\max = \max$ autovalore
 $\min = \min$ autovalore

Oss. Studiare $\max / \min$ di $q(x)$ in $|x|=1$ è equivalente a studiare $\max$ e $\min$ di

$$R(x) = \frac{q(x)}{|x|^2} \quad \text{su tutto } \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$$

↑

Quoziente di RAYLEIGH

Basta osservare che $R(\lambda x) = R(x)$ per ogni $\lambda > 0$ quindi R è costante sulle semirette che escono dall'origine

Back to lezione ? Sia M una matrice $n \times n$. Trovare la costante di Lip. della funzione $f(x) = Mx$ pensata come $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Serve che $|M(x-y)| \leq L |x-y| \quad \forall x, y$
quindi $Mx - My$

$$L = \max \frac{|Mv|}{|v|} \quad v: \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$$

Ma allora

$$L^2 = \max \left\{ \frac{|Mu|^2}{|u|^2} : u \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\} \right\}$$
$$= \max \{ |Mu|^2 : |u|^2 = 1 \}$$

Oss. finale

$$|Mu|^2 = \langle Mu, Mu \rangle = \langle \underbrace{M^T M}_\substack{\uparrow \\ \text{simmetrica}} u, u \rangle$$

Conclusione : la costante di Lip. è il più grande (in modulo) autovalore della matrice

$$M^T M$$

(che è simmetrica, dunque ha autovalori reali).
Poi va fatta la radice.