

MOLTIPLICATORI DI LAGRANGE

Metodo per trovare candidati p.ti di max/min di una funzione data su un insieme descritto come luogo di zeri

Def. Sia $D \subseteq \mathbb{R}^n$ e sia $\phi : D \rightarrow \mathbb{R}$. Si dice luogo di zeri di ϕ l'insieme

$$V := \{x \in \mathbb{R}^n : \underbrace{\phi(x) = 0}_{\text{Equazione di } V}\}$$

Def. Siano $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e $\delta > 0$. Siano $f : B_\delta(x_0) \rightarrow \mathbb{R}$ e $\phi : B_\delta(x_0) \rightarrow \mathbb{R}$.

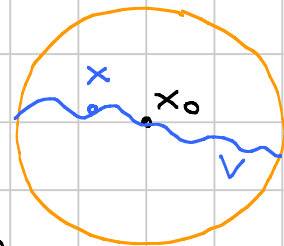
Sia V definito come sopra.

Dico che x_0 è p.to di max per $f(x)$ ristretta a V se
 $x_0 \in V$ of course (aggiunto dopo video)

$$f(x) \leq f(x_0) \quad \forall x \in B_\delta(x_0) \text{ t.c. } \phi(x) = 0$$

... minimo ... $f(x) \geq f(x_0) \quad \forall \dots$

Metodo dei moltiplicatori di Lagrange



Nella situazione della def. di sopra, supponiamo che f e ϕ siano diff. in $B_\delta(x_0)$.

Se x_0 è un p.to di max./min. allora accade almeno una di queste possibilità:

① $\nabla \phi(x_0) = 0$

② $\nabla f(x_0)$ è multiplo di $\nabla \phi(x_0)$, cioè $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ t.c.

↙ Moltiplicatore di Lagrange

$$\nabla f(x_0) = \lambda \nabla \phi(x_0)$$

Utilizzo operativo Supponiamo di essere in 2 variabili.

Sto cercando max / min di $f(x,y)$ su un insieme compatto D .

Cerco i candidati con il solito metodo:

→ staz. interni

→ sing. interni

→ bordo $\leadsto$ qui introduciamo i moltiplicatori: spero che ∂D sia il luogo di zeri di una certa $\phi(x,y)$.

Risolvere due sistemi:

$$\phi_x(x,y) = 0$$

$$\phi_y(x,y) = 0$$

$$\phi(x,y) = 0$$

1° sistema: le soluzioni sono i pti di $\partial D = V$ in cui $\nabla \phi = 0$. Sono i pti di tipo ① nel metodo precedente

Oss. 2 incognite (x,y) e 3 equazioni, quindi spesso non ci sono soluzioni

$$f_x(x,y) = \lambda \phi_x(x,y)$$

$$f_y(x,y) = \lambda \phi_y(x,y)$$

$$\phi(x,y) = 0$$

2° sistema: cerca i pti di $\partial D = V$ in cui $\nabla f = \lambda \nabla \phi$. Sono i pti di tipo ② nella descrizione prec.

Oss. 3 incognite (x,y,λ) e 3 equazioni, quindi "spesso" ci sono soluzioni

Alla fine aggiungo alla lista dei candidati interni i pti di ∂D trovati risolvendo i due sistemi. Per il secondo sistema il valore di λ non conta nulla, ma contano solo x e y .

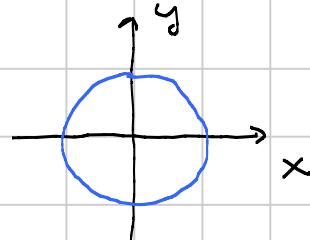
Oss. Risolvere il secondo sistema equivale a trovare i pti stazionari di una funzione ausiliaria di 3 variabili

$$F(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda \phi(x,y)$$

Oss. Se sono in n variabili i sistemi hanno $n+1$ equazioni. Il 1° ha n incognite, il 2° ne ha $(n+1)$.

Esempio 1

$$\max / \min \{ \underbrace{x+2y}_{f(x,y)} : x^2+y^2 \leq 1 \}$$



① Stazionari e singolari interni: $\emptyset$

② Bordo ha equazione

$$\underbrace{x^2+y^2-1}_{\phi(x,y)} = 0$$

Risolvere i 2 sistemi.

1° sistema

$$\begin{cases} \phi_x = 0 \\ \phi_y = 0 \\ \phi = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x = 0 \\ 2y = 0 \\ x^2+y^2 = 1 \end{cases} \quad \begin{matrix} x=0 \\ y=0 \\ \downarrow \\ \text{impossibile} \end{matrix}$$

2° sistema

$$\begin{cases} f_x = \lambda \phi_x \\ f_y = \lambda \phi_y \\ \phi = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 1 = 2\lambda x \\ 2 = 2\lambda y \\ x^2+y^2 = 1 \end{cases} \quad \begin{matrix} \leadsto x = \frac{1}{2\lambda} \\ \leadsto y = \frac{1}{\lambda} \end{matrix} \quad \left. \begin{matrix} \text{dopo aver} \\ \text{oss. che} \\ \lambda \neq 0 \end{matrix} \right\}$$

Sostituisco nella 3ª: $\frac{1}{4\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2} = 1$, $\frac{5}{4} = \lambda^2$, $\lambda = \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$

Quindi ho 2 soluzioni: $(x,y) = \left(\pm \frac{1}{\sqrt{5}}, \pm \frac{2}{\sqrt{5}} \right)$
i segni sono gli stessi

Sostituisco nella $f(x,y)$ e trovo max/min.

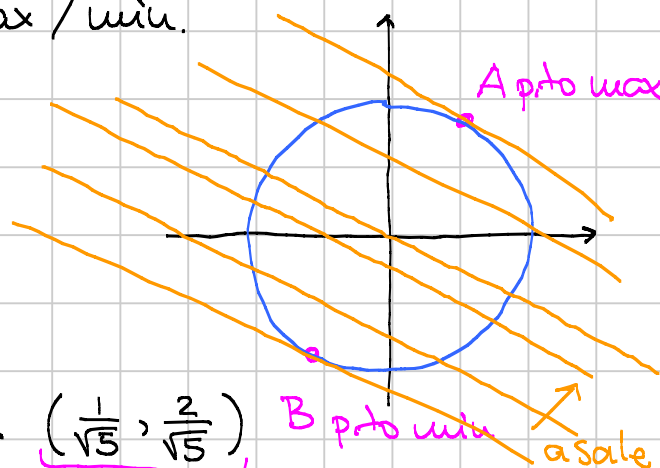
$$f\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right) = \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{4}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$

$$f\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right) = -\sqrt{5}$$

Conclusione: $\max = \sqrt{5}$ p.to di max $\underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)}_A$ B p.to min

$\min = -\sqrt{5}$ p.to di min $\underbrace{(-\dots, -\dots)}_B$

Interpretazione: $f(x,y) = a \Leftrightarrow x+2y = a \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}x + \frac{a}{2}$



Esempio 2

$$\max / \min \left\{ \underbrace{x^2 + 2y^2}_{\phi(x,y)} : \underbrace{x^4 + y^4 \leq 1}_{\text{televisione}} \right\}$$

① Sta. interni: $\nabla \phi(x,y) = (0,0) \Leftrightarrow (x,y) = (0,0)$

② Sing. interni: $\emptyset$

③ Bordo: $\underbrace{x^4 + y^4 - 1}_{\phi(x,y)} = 0$

1° sistema

$$\begin{cases} 4x^3 = 0 \\ 4y^3 = 0 \\ x^4 + y^4 = 1 \end{cases} \leadsto \text{impossibile}$$

2° sistema

$$\begin{cases} \phi_x = \lambda \phi_x \\ \phi_y = \lambda \phi_y \\ x^4 + y^4 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x = 4\lambda x^3 \\ 4y = 4\lambda y^3 \\ x^4 + y^4 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2\lambda x^3 \\ y = \lambda y^3 \\ x^4 + y^4 = 1 \end{cases}$$

1ª equazione

$$x=0$$

↓ ← 3ª eqm.

$$y = \pm 1$$

$$\boxed{(0, \pm 1)}$$

$$1 = 2\lambda x^2$$

↓ ← 2ª eqm.

$$y=0$$

↓ ← 3ª eqm.

$$\boxed{(\pm 1, 0)}$$

$$1 = \lambda y^2$$

$$x^2 = \frac{1}{2\lambda} \quad y^2 = \frac{1}{\lambda}$$

↓ ← 3ª eqm.

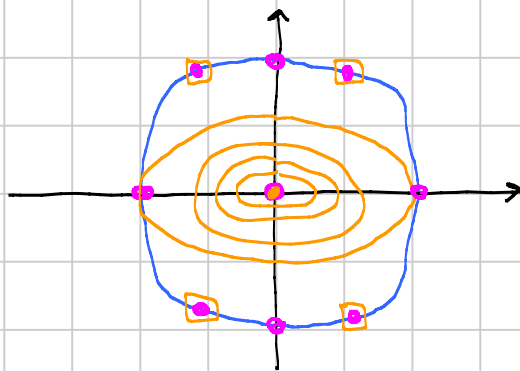
$$\frac{1}{4\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2} = 1 \leadsto \lambda = \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$$

da cui trovo $x^2 = \pm \frac{1}{\sqrt{5}} \quad y^2 = \pm \frac{2}{\sqrt{5}}$ scarto quelle con

il segno - e trovo 4 possibilità per (x,y)

Alla fine ho trovato 8 pti +
quello stazionario interno.

Sostituendo trovo max/min.



Dalle linee di livello è chiaro che
il minimo è nell'origine, ma non
è chiaro se il max è in $(0, \pm 1)$ o nei 4 pti simmetrici.
— o — o —