

Esercizio 1 Consideriamo $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = |x|^2$.
Scrivere $\nabla f(x_0)$ e $Hf(x_0)$.

$$\begin{aligned} f(x_0 + R) &= |x_0 + R|^2 = |x_0|^2 + |R|^2 + 2\langle x_0, R \rangle \\ &= |x_0|^2 + \underbrace{\langle 2x_0, R \rangle}_{f'(x_0)} + \langle R, R \rangle \\ &= f(x_0) + \langle \nabla f(x_0), R \rangle + \frac{1}{2} \langle H(x_0)R, R \rangle \end{aligned}$$

da cui $\nabla f(x_0) = 2x_0$, $Hf(x_0) = 2\text{Id}$.

Allo stesso risultato si arrivava "facendo le derivate".

Variante $g(x) = |x|^4$ Voglio calcolare $\nabla g(x_0)$

Osservo che $g(x) = [f(x)]^2$, quindi per la CHAIN RULE

$$\nabla g(x) = \underbrace{2f(x)}_{\text{numero}} \cdot \underbrace{\nabla f(x)}_{\text{vettore}} = 2|x|^2 \cdot 2x = 4|x|^2 x$$

Altra variante $R(x) = |x|$

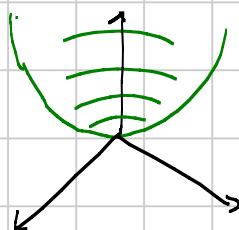
$$R(x) = \sqrt{f(x)} \quad \nabla R(x) = \frac{1}{2\sqrt{f(x)}} \nabla f(x) = \frac{1}{2|x|} \cdot 2x = \frac{x}{|x|}$$

per $x \neq 0$. Se $x=0$, allora $\nabla R(x)$ non esiste, e non esistono nemmeno le derivate parziali.

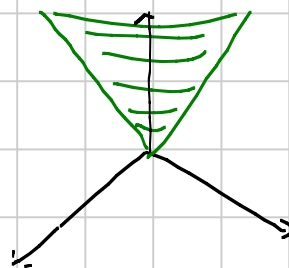
$$\frac{\partial R}{\partial x_i}(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{R(0 + t e_i) - R(0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{|t|}{t}$$

diverso per $t \rightarrow 0^+$ e $t \rightarrow 0^-$

In $\mathbb{R}^2$



$|x|^2$



$|x|$

Esercizio 2 Sia M una matrice $n \times n$, non necess. simmetrica
Consideriamo $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \langle Mx, x \rangle$$

Calcolare $\nabla f(x_0)$ e $Hf(x_0)$

$$\begin{aligned} f(x_0 + R) &= \langle M(x_0 + R), x_0 + R \rangle \\ &= \langle Mx_0 + MR, x_0 + R \rangle \\ &= \underbrace{\langle Mx_0, x_0 \rangle}_{f(x_0)} + \underbrace{\langle Mx_0, R \rangle + \langle MR, x_0 \rangle}_{\langle \nabla f(x_0), R \rangle} + \underbrace{\langle MR, R \rangle}_{\frac{1}{2} \langle Hf(x_0) R, R \rangle} \end{aligned}$$

Conclusione SBAGLIATA: $Hf(x_0) = 2M$, a meno che M non sia simmetrica.

Osservo che

$$\langle MR, x_0 \rangle = \langle R, M^T x_0 \rangle = \langle M^T x_0, R \rangle$$

e pertanto

$$\begin{aligned} \langle Mx_0, R \rangle + \langle MR, x_0 \rangle &= \langle Mx_0, R \rangle + \langle M^T x_0, R \rangle \\ &= \langle (M + M^T) x_0, R \rangle \end{aligned}$$

e quindi

$$\nabla f(x_0) = (M + M^T) x_0 \quad (\text{compatibile con esercizio 1 in cui } M = \text{Id})$$

Per il Hessiano osserviamo che

$$\begin{aligned} \langle Hf(x_0) R, R \rangle &= \langle 2MR, R \rangle = \langle MR, R \rangle + \langle MR, R \rangle \\ &= \langle MR, R \rangle + \langle R, M^T R \rangle \\ &= \langle MR, R \rangle + \langle M^T R, R \rangle \\ &= \langle (M + M^T) R, R \rangle \end{aligned}$$

da cui

$$Hf(x_0) = \underbrace{M + M^T}_{\text{matrice simm.}} \quad (\text{compatib. con Esercizio 1})$$

Oss. (esercizio di algebra lineare)

Data una matrice M esiste un'unica matrice simmetrica A t.c.
 $\underbrace{\langle Mx, x \rangle}_{=0} = \underbrace{\langle Ax, x \rangle}_{=0}$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n$.

Esercizio 3 (Equazione delle onde)

Caratterizzare tutte le funzioni $u: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^2 t.c.

$$u_{tt}(t, x) = u_{xx}(t, x) \quad \forall (t, x) \in \mathbb{R}^2$$

Sottoesercizio 3.1 Caratt. $f \in C^1(\mathbb{R}^2) : f_x(x, y) = 0$

Sono tutte e sole le funzioni del tipo $f(x, y) = \psi(y)$.

Pongo $\psi(y) = f(0, y)$ e osservo che

$$f(x, y) - f(0, y) = x \cdot \overset{\substack{\uparrow \\ \text{Lagrange in } x}}{f_x(c, y)} = 0 \Rightarrow f(x, y) = \psi(y)$$

Sottoesercizio 3.2 Caratt. $f \in C^2(\mathbb{R}^2) : f_{xy}(x, y) = 0$

$$\frac{\partial}{\partial x} [f_y(x, y)] = 0 \Rightarrow f_y(x, y) = \psi(y)$$

$$\Rightarrow f(x, y) = \overset{\substack{\uparrow \\ \text{primitiva di } \psi(y)}}{\Psi(y)} + \varphi(x)$$

$$f(x, y) = f(x, 0) + \int_0^y f_y(x, s) ds$$

$$\overset{||}{\varphi(x)} + \int_0^y \psi(s) ds = \varphi(x) + \Psi(y)$$

Le funzioni che risolvono $f_{xy}(x, y) = 0 \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$
sono tutte e sole quelle del tipo

$$f(x, y) = \varphi(x) + \psi(y).$$

Back to esercizio 3.

Considero la funzione $g(\xi, \eta) = f(\overbrace{\xi+\eta}^t, \overbrace{\xi-\eta}^x)$

Vado a calcolare con la CHAIN RULE le derivate di g :

$$g_\xi = \frac{\partial f}{\partial t} \cdot \frac{\partial t}{\partial \xi} + \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} = f_t(\xi+\eta, \xi-\eta) \cdot 1 + f_x(\dots) \cdot 1$$

$$g_\eta = \frac{\partial f}{\partial t} \cdot \frac{\partial t}{\partial \eta} + \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} = f_t(\dots) \cdot 1 + f_x(\dots) \cdot (-1)$$

$$g_{\xi\eta}(\xi, \eta) = \underbrace{f_{tt}(\dots) \cdot 1}_{\text{la somma viene 0 per ipotesi}} + \cancel{f_{tx}(\dots) \cdot (-1)} + \cancel{f_{xt}(\dots) \cdot 1} + \underbrace{f_{xx}(\dots) \cdot (-1)}$$

la somma viene 0 per ipotesi

Ma allora

$$g_{\xi\eta}(\xi, \eta) = 0 \quad \forall (\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2$$

quindi

$$g(\xi, \eta) = \varphi(\xi) + \psi(\eta)$$

Data g , posso ricostruire f , basta risolvere

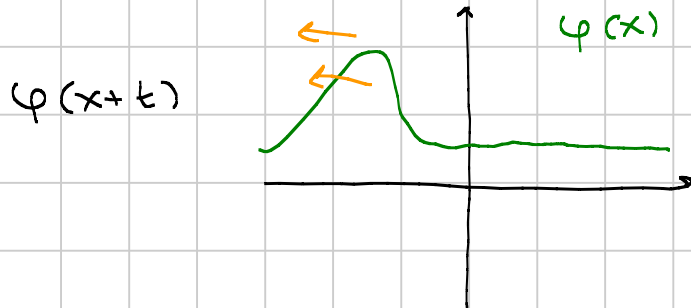
$$\begin{cases} \xi + \eta = t \\ \xi - \eta = x \end{cases} \quad 2\xi = t+x \quad \xi = \frac{t+x}{2} \quad \eta = \frac{t-x}{2}$$

da cui

$$f(t, x) = g\left(\frac{t+x}{2}, \frac{t-x}{2}\right) = \varphi\left(\frac{t+x}{2}\right) + \psi\left(\frac{t-x}{2}\right)$$

Cambiando φ e ψ posso scriverla nella forma

$$\boxed{f(t, x) = \varphi(\underbrace{x+t}_{\text{TRAVELING WAVES}}) + \psi(\underbrace{x-t}_{\text{TRAVELING WAVES}})}$$



Ogni sol. dell'eq. delle onde è somma di 2 traveling waves che vanno in direzione opposta

Variante Trovare tutte le soluzioni di

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} \quad \text{con } c \text{ parametro } > 0.$$