

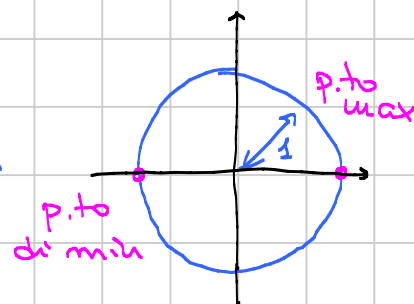
Come trovare max/min di una funzione su un compatto

- ① Vedere a occhio
- ② Metodo delle linee di livello
- ③ Procedura standard cercando
 - stat. interni
 - singolari interni
 - Bordo, per il quale esistono 2 tecniche
 - PARAMETRIZZAZIONE
 - MOLTIPLICATORI DI LAGRANGE

Esempio 1

$$\max \{ \underbrace{x}_{f(x,y)} : \underbrace{x^2 + y^2 \leq 1}_{\substack{\uparrow \text{descrizione dell'insieme } A \\ \text{dove è def. } f(x,y)}} \} = 1$$

$$\min \{ \dots \} = -1$$

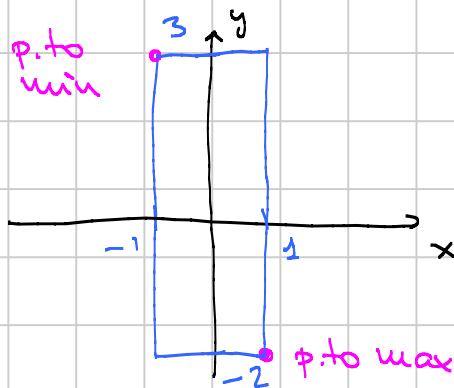


Esempio 2

$$\max / \min \{ 3x - 5y : (x,y) \in [-1,1] \times [-2,3] \}$$

$$\max = 13 \quad \text{p.to di max } (1, -2)$$

$$\min = -18 \quad \text{p.to di min } (-1, 3)$$



Esempio 3

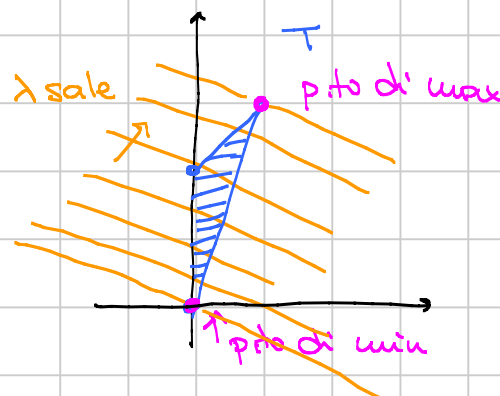
$$\max / \min \{ x + 2y : (x,y) \in T \}$$

T è il triangolo con vertici in $(0,0)$, $(0,2)$, $(1,3)$

Con le linee di livello: disegno delle linee di livello della funzione

$$f(x,y) = \lambda$$

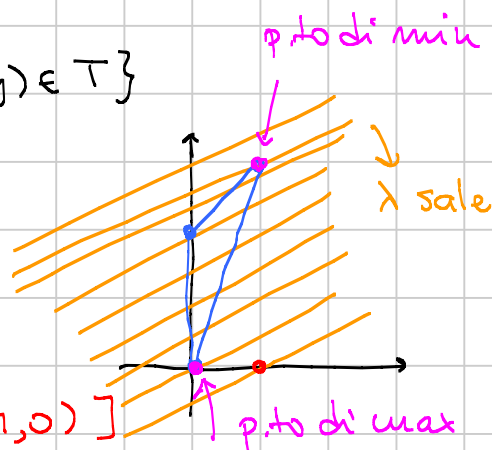
$$x + 2y = \lambda \quad y = -\frac{x}{2} + \frac{\lambda}{2}$$



I p.ti di max / min sono le intersezioni di T corrispondenti ai valori di λ max / min.

Esempio 3-bis max / min $\{x - 2y : (x, y) \in T\}$

Con ragionamento ad occhio non si arriva alla risposta

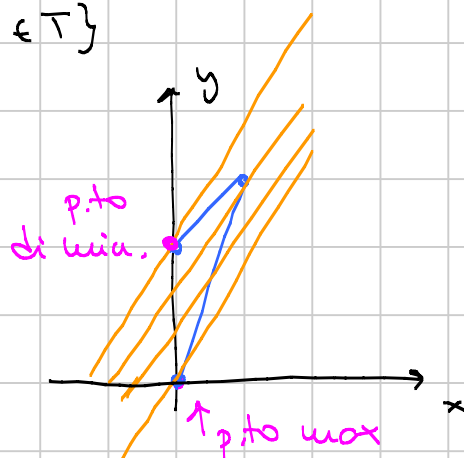


[Achtung! Non posso dire che per il max uso x più grande e y più piccolo, quindi $(1,0)$]

Scrivo le linee di livello: $x - 2y = \lambda$, $y = \frac{x}{2} - \frac{\lambda}{2}$

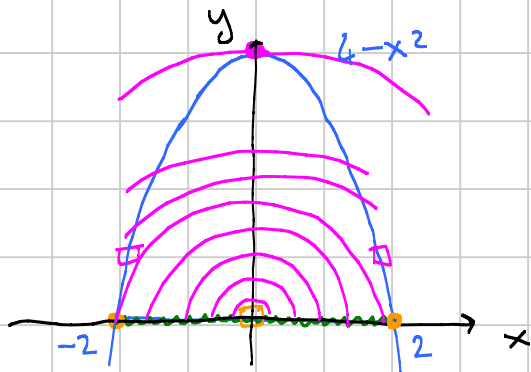
Esempio 3-ter max / min $\{x - \frac{1}{2}y : (x, y) \in T\}$

Linee di livello $x - \frac{1}{2}y = \lambda$ $y = 2x - 2\lambda$



Esempio 4 max / min $\{x^2 + y^2 : (x, y) \in A\}$

$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 4 - x^2\}$



Il minimo si vede a occhio

min = 0 p.to di min = $(0,0)$

max = 16 p.to di max = $(0,4)$

↑ ma non è dim. per bene

Seguiamo la procedura:

→ Staz. interni: $\emptyset$ $2x = 0, 2y = 0$ $(0,0)$ non è interno

→ Sing. interni: $\emptyset$

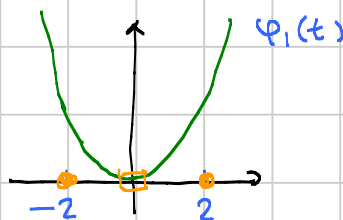
→ Bordo, che è fatto da 2 pezzi

Pezzo ① = $\{(t, 0) : t \in [-2, 2]\}$

Pezzo ② = $\{(t, 4 - t^2) : t \in [-2, 2]\}$

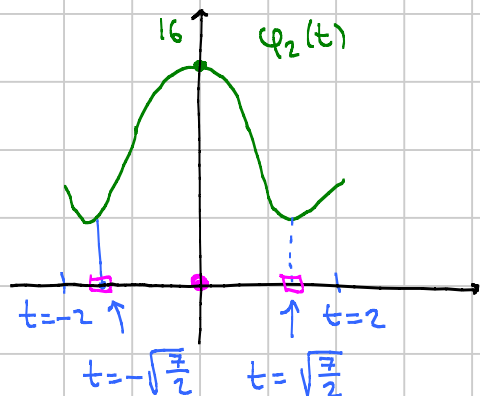
Parametrizzo la funzione sul bordo

$$\varphi_1(t) = f(t, 0) = t^2$$



max per $t = \pm 2$ che corrisponde a $(x, y) = \begin{cases} (-2, 0) \\ (2, 0) \end{cases}$
 min per $t = 0$ che corrisponde a $(0, 0)$

$$\begin{aligned} \varphi_2(t) = f(t, 4-t^2) &= t^2 + (4-t^2)^2 = t^2 + 16 - 8t^2 + t^4 \\ &= t^4 - 7t^2 + 16 \quad t \in [-2, 2] \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \varphi_2'(t) &= 4t^3 - 14t = 0 \\ \text{per } t=0 \text{ e } t^2 &= \frac{7}{2} \end{aligned}$$

Nel pezzo 2 abbiamo

max per $t=0 \rightsquigarrow$ corrisponde a $(0, 4)$
 min per $t = \pm \sqrt{\frac{7}{2}} \rightsquigarrow$ corrisponde
 a $(\pm \sqrt{\frac{7}{2}}, \frac{1}{2})$

Alla fine ho ottenuto 6 p.ti candidati

$$(\pm 2, 0)$$

$$(0, 0)$$

$$(\pm \sqrt{\frac{7}{2}}, \frac{1}{2})$$

$$(0, 4)$$

Li sostituisco tutti nella funzione e
 confronto i valori: dove vale di + è il max
 " " " - è il min.

Esempio 4-bis

$$\max / \min \{ x^2 + y^2 : \underbrace{x \in [-2, 2], y = 4 - x^2}_A \}$$

A

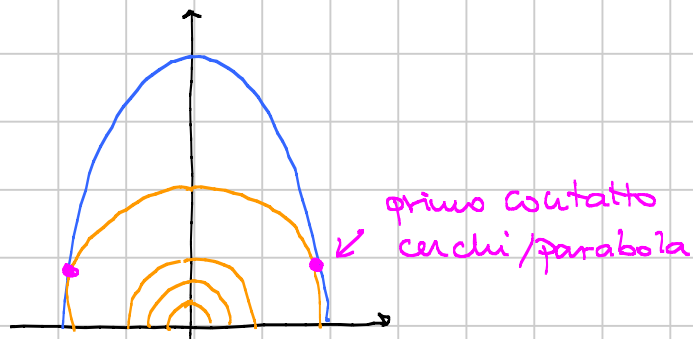
solo pezzo di parabola

In questo caso la risposta è
 la $\varphi_2(t)$ di prima, da cui

$$\max = 16 \quad \text{p.to di max} = (0, 4)$$

$$\min = \frac{49}{4} - \frac{49}{2} + 16 \quad \text{p.to di min} = (\pm \sqrt{\frac{7}{2}}, \frac{1}{2})$$

In termini di linee
di livello



Strategie di parametrizzazione. Come parametrizzo in $\mathbb{R}^2$

- segmento di estremi (a_1, b_1) e (a_2, b_2)

$$\{(a_1 + t(a_2 - a_1), b_1 + t(b_2 - b_1)) : t \in [0, 1]\}$$

- tratto della curva $y = f(x)$ con $x \in [a, b]$

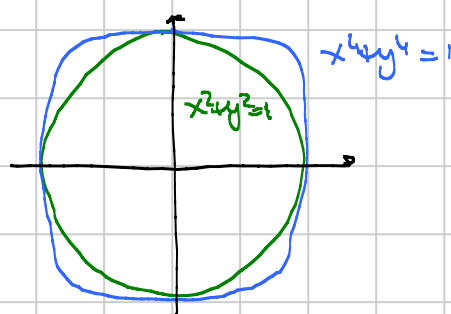
$$\{(t, f(t)) : t \in [a, b]\}$$

- circonferenza di centro (a, b) e raggio r :

$$\{(a + r \cos t, b + r \sin t) : t \in [0, 2\pi]\}$$

- ellisse $ax^2 + by^2 = 1$ $\left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{a}} \cos t, \frac{1}{\sqrt{b}} \sin t \right) : t \in [0, 2\pi] \right\}$

- $x^4 + y^4 = 1$



Due pezzi: $\{(t, \sqrt[4]{1-t^4}) : t \in [-1, 1]\}$ (parte alta)

$\{(t, -\sqrt[4]{1-t^4}) : t \in [-1, 1]\}$ (parte bassa)