

Max e min per funzioni di più variabili

Teorema Sia $K \subseteq \mathbb{R}^n$. Allora i seguenti fatti sono equivalenti.

- (i) K è LIMITATO + CHIUSO,
- (ii) K è compatto per successioni,
- (iii) K è compatto per ricoprimenti.

Def. Un insieme $K \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice

- CHIUSO se coincide con la sua chiusura (opp. complementare aperto)
- LIMITATO se $\exists R > 0$ t.c. $K \subseteq B_R(0)$ (o equivalentemente $K \subseteq B_R(x_0)$ per un qualche centro x_0)
- COMPATTO PER SUCCESSIONI se per ogni $\{x_n\} \subseteq K$ esiste $n_k \rightarrow +\infty$ ed esiste $x_\infty \in K$ t.c. $x_{n_k} \rightarrow x_\infty$
 $\uparrow$
 limite in $\mathbb{R}^n$
- COMPATTO PER RICOPRIMENTI se per ogni $\{U_i\}_{i \in I}$ aperti di $\mathbb{R}^n$ t.c. $K \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i$ esiste $J \subseteq I$ finito t.c.

$$K \subseteq \bigcup_{j \in J} U_j$$

(ogni ricoprimento ammette s.ric. finito)

Def. $K \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice COMPATTO se verifica una delle 3 equiv.

Dim. $(i) \Rightarrow (ii)$ Per semplicità partiamo in $\mathbb{R}^2$.

Prendiamo $K \subseteq \mathbb{R}^2$ lim. + chiuso, sia $\{v_m\} \subseteq K$ una succ.

$$v_m = (x_m, y_m).$$

Passo 1: essendo K limitato, $|v_m| \leq R$ per un certo raggio R .

Ma allora $|x_m| \leq R$ e $|y_m| \leq R$ per ogni $m \in \mathbb{N}$

$$|x_n| = \sqrt{x_n^2} \leq \sqrt{x_n^2 + y_n^2} \leq R$$

Passo 2 Per Bolzano - Weierstrass in una dimensione, $\{x_m\}$ ammette una s.succ. convergente

$$x_{m_k} \rightarrow x_\infty$$

Passo 3 Considero ora la successione $\{y_{m_k}\}$. Questa per B-W ammette una sottosucc. a sua volta convergente

$$y_{m_{k_i}} \rightarrow y_\infty$$

Questo garantisce anche che $x_{m_{k_i}} \rightarrow x_\infty$

Passo 4 Sono riuscito a far convergere le componenti

$$\begin{array}{c} \text{lim. in } \mathbb{R} \\ \downarrow \\ y_{m_{k_i}} \rightarrow y_\infty \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \text{lim. in } \mathbb{R} \\ \downarrow \\ x_{m_{k_i}} \rightarrow x_\infty \end{array}$$

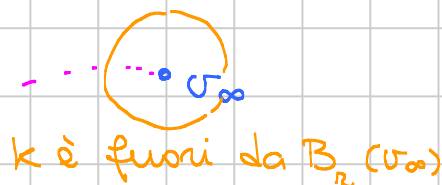
Dico che $(x_{m_{k_i}}, y_{m_{k_i}}) \xrightarrow[\text{lim. in } \mathbb{R}^2]{\uparrow} (x_\infty, y_\infty) = v_\infty$

Basta verificare che

$$|v_{m_{k_i}} - v_\infty| = \left(\underset{\downarrow 0}{|x_{m_{k_i}} - x_\infty|^2} + \underset{\downarrow 0}{|y_{m_{k_i}} - y_\infty|^2} \right)^{1/2} \rightarrow 0$$

Passo 5 Resta da dimostrare che $v_\infty \in K$. Questo segue banalmente dalla chiusura di K .

[Se $v_\infty \notin K$, essendo il complement. aperto ... definitivamente la succ. sarebbe fuori da K].

 K è fuori da $B_r(v_\infty)$

— o — o —

Oss. In $\mathbb{R}^n$ si complicano solo le notazioni, ma l'idea è la stessa: ogni volta estraggo una s.succ. dalla precedente per far convergere una nuova componente.

Dim (ii) $\Rightarrow$ (i) Per assurdo

Supponiamo K non LIMITATO. Allora per ogni $n \in \mathbb{N}$ trovo un p.to

$$v_n \in K \quad \text{t.c.} \quad |v_n| \geq n$$

Questa non può avere s.succ. convergenti

Supponiamo K non chiuso. Allora esiste v_∞ aderente a K ma non in K . Allora per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste

$$v_n \in B_{\frac{1}{n}}(v_\infty)$$

Ma allora $v_n \rightarrow v_\infty$, quindi tutte le sue s.succ. $\rightarrow v_\infty \notin K$.

TEOREMA DI WEIERSTRASS Sia $D \subseteq \mathbb{R}^n$ e sia $f: D \rightarrow \mathbb{R}$.

Supponiamo che

(i) D compatto,

(ii) f continua.

Allora esistono per forza

$$\max \{ f(x) : x \in D \}$$

$$\min \{ f(x) : x \in D \}$$

Variante semicontinua:

(i) D compatto

(ii) f SCI (semicontinua inf.)

Allora esiste per forza il min

(semicontinua sup)

(esiste max).

Dim. Direttamente in versione SCI. Di sicuro esiste

$$I := \inf \{ f(x) : x \in D \} \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$$

Per definizione di inf e il solito lemma, I è il limite di una successione di valori nell'immagine, quindi

$$\exists \{x_n\} \subseteq D \quad \text{t.c.} \quad f(x_n) \rightarrow I$$

$\uparrow$
 succ. minimizzante

Per la compattezza per succ. di D esiste $x_{n_k} \rightarrow x_\infty \in D$.

Per la SCI di $f(x)$ avremo che

$$I \leq f(x_\infty) \leq \liminf_{k \rightarrow +\infty} f(x_{n_k}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = I$$

$\uparrow$ I è inf. $\uparrow$ f SCI $\uparrow$ se $f(x_n)$ ha lim., allora tutte le s.succ. hanno lo stesso limite $\uparrow$ succ. min.

Essendo LHS = RHS, in mezzo sono tutte uguali, quindi
 $f(x_\infty) = I$

Quindi da ora $I \in \mathbb{R}$ ed è il minimo, mentre x_∞ è un p.to di minimo. $\square$

— o — o —

Corollario Una funzione continua su un compatto è per forza LIMITATA

— o — o —

Operativamente, dove cerco i p.ti di max/min una volta che so che esistono?

Nelle solite 3 categorie

(1) Stazionari interni : p.ti $x \in \text{Int}(D)$ t.c. $\nabla f(x) = 0$

(2) Singolari interni : p.ti $x \in \text{Int}(D)$ t.c. $\nabla f(x)$ non esiste

$\uparrow$
non esiste almeno una delle derivate parziali

(3) Bordo : $x \in \partial D$

$\uparrow$ in generale questo è complicato

Dim. Sia x_0 un p.to di max / min per $f(x)$ in D .

Allora abbiamo 3 casi:

- se $x_0 \in \partial D$ siamo in (3)
- se $x_0 \in \text{Int}(D)$ e $\nabla f(x_0)$ N.E. siamo in (2)
- se $x_0 \in \text{Int}(D)$ e $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)$ esistono tutte, devo dim. che sono nulle.

Considero la funzione $\varphi_i(t) = f(x_0 + t e_i)$

È definita almeno in un intorno $\uparrow$ 1-esimo vett. base canonica

di $t=0$ (perché $x_0 \in \text{Int}(D)$) e ha max / min per $t=0$, quindi

$\varphi_i'(0)$ (se esiste) deve fare 0

" $\leftarrow$ defin. di derivata parziale
 $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)$

— 0 — 0 —