

Sia x_0 un p.to stazionario ($\nabla f(x_0) = 0$)

① $Hf(x_0) > 0$ (def. pos.) $\Rightarrow x_0$ p.to di min. locale

[Dim.] Taylor-Peano $f(x_0 + R) = f(x_0) + \frac{1}{2}q(R) + o(|R|^2)$

$\uparrow$
 forma quadratica
 associata ad $Hf(x_0)$

$$= f(x_0) + \frac{1}{2}q(R) + |R|^2 w(R)$$

Ma allora per il lemma fondamentale esiste $m > 0$ t.c.

$$f(x_0 + R) - f(x_0) = \frac{1}{2}q(R) + |R|^2 w(R)$$

$$\geq \frac{m}{2}|R|^2 + |R|^2 w(R) = |R|^2 \left(\frac{m}{2} + w(R) \right)$$

$\uparrow$
 0

$\geq \frac{m}{4}$ in un opportuno $B_\delta(x_0)$

Questo dim. che $f(x_0 + R) - f(x_0) \geq 0$ in $B_\delta(x_0)$
 con disug. stretto se $R \neq 0$.

② $Hf(x_0) < 0 \Rightarrow x_0$ p.to di max. locale

[Dim.] Stessa cosa, solo che nel p.to di max $q(x) \leq -m|x|^2$

③ $Hf(x_0)$ indefinita $\Rightarrow x_0$ non è né max, né min.

[Dim.] Essendo indefinita, vuol dire che

$$\exists v \in \mathbb{R}^n: q(v) > 0$$

$$\exists w \in \mathbb{R}^n: q(w) < 0$$

$$\varphi(t) = f\left(x_0 + \underbrace{t v}_{\frac{1}{2}}\right) = f(x_0) + \frac{1}{2} q(t v) + |t v|^2 \omega(t v)$$

$$= f(x_0) + \frac{1}{2} t^2 q(v) + t^2 |v|^2 \omega(t v)$$

$$= f(x_0) + t^2 \left(\underbrace{\frac{1}{2} q(v)}_{>0} + \underbrace{|v|^2 \omega(t v)}_{\uparrow 0} \right)$$

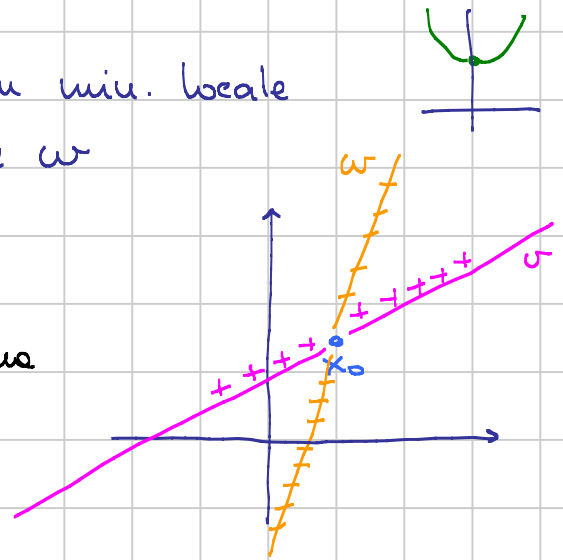
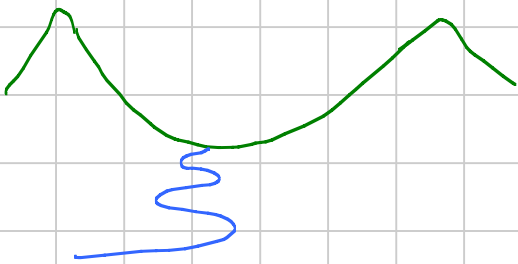
$$\geq f(x_0) + t^2 \frac{1}{4} q(v) \quad \text{se } t \text{ è vicino a } 0.$$

Muovendoti lungo la direzione v vedo un min. locale

Con un conto analogo lungo la direzione w vedo un max.

— o — o —

Geometricamente x_0 è quello che si chiama
p.to di sella o mountain pass



Esercizio 1 Determinare i p.ti stazionari della funzione

$$f(x, y) = x^4 + y^4 - xy$$

e capire di che tipo sono.

$$\nabla f(x, y) = 0 \quad \begin{cases} 4x^3 - y = 0 \\ 4y^3 - x = 0 \end{cases} \quad \begin{aligned} y &= 4x^3 \\ 4^4 x^9 - x &= 0 & x(2^8 x^8 - 1) &= 0 \end{aligned}$$

$$x=0 \rightsquigarrow y=0 \rightsquigarrow (0,0)$$

$$x = \pm \frac{1}{2} \rightsquigarrow y = \pm \frac{1}{2} \text{ con lo stesso segno} \rightsquigarrow \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

Per capire cosa sono posso fare il $Hf = \begin{pmatrix} 12x^2 & -1 \\ -1 & 12y^2 \end{pmatrix}$

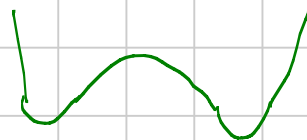
$$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{Det} = -1 \quad \text{segnatura } +- \Rightarrow \text{sella}$$

$$Hf\left(\pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{segnatura } ++ \Rightarrow \text{p.ti di min.}$$

HARD-HARD Sia $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$. Supponiamo che abbia almeno due p.ti di min. locale

→ c'è per forza un p.to di max?

→ c'è per forza un altro stazionario?



HARD-HARD-HARD Sia $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ tale che

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x, y_0) = +\infty \quad \forall y_0 \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{y \rightarrow \pm\infty} f(x_0, y) = -\infty \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}$$

Esiste per forza un p.to stazionario?

— 0 — 0 —

Esercizio 1 $f(x, y) = x^2 + y^4 + xy^2$

L'origine è un p.to stazionario. Di che tipo?

$$Hf = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

quindi BOH !!!

Completando i quadrati: $x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{y^2}{2} + \frac{1}{4}y^4 - \frac{1}{4}y^4 + y^4$

$$= \left(x + \frac{1}{2}y^2\right)^2 + \frac{3}{4}y^4 > 0 \quad \text{se } (x, y) \neq (0, 0)$$

⇒ (0, 0) è p.to di minimo assoluto

Esercizio 2 $f(x, y) = x^2 + y^4 + 3xy^2$

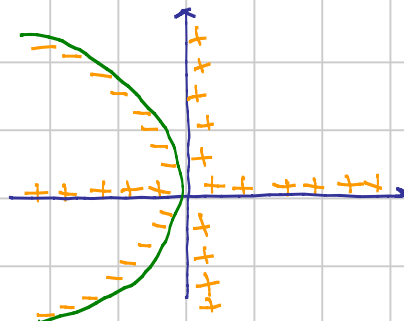
Come prima: $\left(x + \frac{3}{2}y^2\right)^2 - \frac{5}{4}y^4$. Faccio in modo che la prima parentesi sia nulla

corretto dopo video

$f\left(-\frac{3}{2}t^2, t\right) = -\frac{5}{4}t^4$, quindi vicino a (0, 0) ci sono p.ti in cui $f(x, y) < 0$

Alternativa: cambio di variabili

$$z = y^2$$



Esercizio 3 $f(x,y) = x \sin y - y \sin x + x^2 y^2$ $(0,0)$ è stazionario
Sviluppo di Taylor

$$\begin{aligned} f(x,y) &= x \left(y - \frac{1}{3!} y^3 + o(y^3) \right) - y \left(x - \frac{1}{3!} x^3 + o(x^3) \right) \\ &= \cancel{xy} - \frac{1}{6} xy^3 - \cancel{xy} + \frac{1}{6} x^3 y + o\left((x^2+y^2)^{\frac{5}{2}}\right) \\ &\quad \text{i termini buttati sono di grado } \geq 6 \\ &= \frac{1}{6} xy(x^2 - y^2) + o(\rho^5) \\ &\quad \text{segno variabile, quindi forse non è max/min} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(t, 2t) &= t \sin(2t) - 2t \sin t + o(t^5) \\ &= t \left(2t - \frac{1}{6} 8t^3 \right) - 2t \left(t - \frac{1}{6} t^3 \right) + o(t^5) \\ &= -\frac{4}{3} t^4 + \frac{1}{3} t^4 + o(t^5) = -t^4 + o(t^5) \leadsto \text{max} \end{aligned}$$

$f(2t, t) \leadsto$ vedo un minimo. Oss. $H^2 f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Quanto fa $f_{xxxxxyyyx}(0,0) = 0$

↓
compare nel Taylor davanti $x^3 y^4$ e questo termine
nel Taylor "non c'è"

— 0 — 0 —