

Analizzati sulle forme quadraticheTecnica di completamento dei quadratiEsempi $q(x, y) = \underline{x^2} + 4y^2 + \underline{3xy}$ voglio la segnatura

$$= \underline{x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{3y}{2} + \frac{9}{4}y^2} - \frac{9}{4}y^2 + 4y^2$$

$$= \left(x + \frac{3}{2}y\right)^2 + \frac{7}{4}y^2 \quad \text{somma di 2 quadrati} \Rightarrow \text{segnatura è } ++$$

$$q(x, y, z) = \underline{x^2} + 2y^2 + \underline{3xy} + z^2 + \underline{4xz}$$

$$= \underline{x^2 + 2x \cdot \frac{3}{2}y + 2 \cdot x \cdot 2z} + \underline{\frac{9}{4}y^2} - \frac{9}{4}y^2 + \underline{4z^2} - 4z^2$$

$$+ \underline{2 \cdot \frac{3}{2}y \cdot 2z} - 2 \cdot \frac{3}{2}y \cdot 2z + 2y^2 + z^2$$

$$= \left(x + \frac{3}{2}y + 2z\right)^2 + \text{roba in } y \text{ e } z \text{ che tratto come sopra}$$

$$= \text{supponiamo } (\dots)^2 + (\dots)^2 - (\dots)^2 \quad ++-$$

Sylvester border lineEsempio

+ 0 (-)

↓ segnatura può essere solo --- opp. ++-
 ↓ compatibile con
 il primo segno +

- + 0 - + 0

Quasi subito so che $i_0 = 1$

+++++ → NO

+++--

+---+

↑

+---

+++--

← impossibile perché
 i primi 2 sono --

Lemma fondamentale Sia $q(x)$ una forma quadratica (su n variabili).

Supponiamo che q sia definita positiva.

Allora esiste una costante $m > 0$ tale che

$$q(x) \geq m |x|^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

↑
più piccolo autovalore

Dim. Sia A la matrice associata alla forma, cioè $q(x) = \langle Ax, x \rangle$

Ora la matrice A è simmetrica, quindi per il $= x^t A x$

teorema spettrale è diagonalizzabile mediante una matrice ortogonale, cioè

$$M^t A M = D \leftarrow \text{sulla diag. gli autovalori}$$
$$M^t$$

Ma allora

da dimostrare

$$q(x) = x^t A x = x^t M^t D M x = (Mx)^t D (Mx) \geq m |Mx|^2 = m |x|^2$$

↑
 M è ortogo..

Resta da dimostrare che per ogni $v \in \mathbb{R}^n$ vale la disug.

$$(Mx)^t Mx = x^t \underbrace{M^t M}_{Id} x = |x|^2$$

$$v^t D v \geq m |v|^2$$

||

$$v = (v_1, \dots, v_n)$$

$$\sum \lambda_i v_i^2 \geq m \sum v_i^2$$

↑
min. dei λ_i

— o — o —

Risultato analogo Se q è una forma quadratica, allora esiste $M > 0$ t.c.

$$q(x) \leq M |x|^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

↑
più grande autovalore

— o — o —

MATRICE HESSIANA

Matrice che ha come elementi le derivate parziali seconde

$$\{Hf(x_0)\}_{ij} = \frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x_i \partial x_j}$$

Schwarz $\Rightarrow$ sotto ipotesi decenti è una matrice simmetrica.

Per semplicità prendiamo $f(x,y)$ e scriviamo Taylor di ordine 2 in $(0,0)$

$$f(x,y) = f(0,0)$$

$$+ f_x(0,0)x + f_y(0,0)y$$

ordine 0 $\rightsquigarrow$ funzione

ordine 1 $\rightsquigarrow$ gradiente

$$+ \frac{1}{2} [f_{xx}(0,0)x^2 + 2f_{xy}(0,0)xy + f_{yy}(0,0)y^2]$$

ordine 2

Forma quadratica associata alla matrice $Hf(0,0)$

$$+ o(x^2 + y^2)$$

In generale per n variabili con centro in x_0 qualunque possiamo scrivere

$$f(x_0 + R) = f(x_0) + \langle \nabla f(x_0), R \rangle + \frac{1}{2} R^t Hf(x_0) R + o(|R|^2)$$

Forma quadratica

Def. Il pto x_0 si dice stazionario se $\nabla f(x_0) = 0$

Geometricamente: in 2 variabili vuol dire piano tangente // piano xy

Equazione in generale del piano tangente al grafico di $f(x,y)$ nel punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$:

$$z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

Studio locale vicino ad un p.to stazionario

Teorema Sia f una funzione C^2 in un intorno di x_0 (e volendo si può risparmiare).

Supponiamo che $\nabla f(x_0) = 0$

Allora

- se $Hf(x_0)$ è def. pos., x_0 è p.to di min. locale (cioè esiste $\delta > 0$ tale che $f(x) > f(x_0)$ per ogni $x \in B_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}$)
- se $Hf(x_0)$ è def. neg., x_0 è p.to di max. loc.
- se $Hf(x_0)$ è indefinito, x_0 non è né max. loc., né min. loc.
- se $Hf(x_0)$ è semidef. (pos. o neg.) SONO GUAI SERI.

Achtung! $Hf(x_0)$ semidef. pos. $\nRightarrow$ minimo locale

Esempio 1 $f(x, y) = x^2 + y^4$ $(0, 0)$

$$\nabla f(0, 0) = (0, 0)$$

$$Hf(0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \boxed{\geq 0}$$

semidef. pos.

$(0, 0)$ è p.to di min. globale ($\forall (x, y) \neq (0, 0)$ vale $f(x, y) > 0$)

Esempio 2 $f(x, y) = x^2 - y^4$ $(0, 0)$ ∇f e Hf non cambiano

$(0, 0)$ non è né p.to di max, né p.to di min locale

