

Polinomi di Taylor in più variabili

$$f(x_0 + R) = \sum_{|p| \leq m} \frac{D^p f(x_0)}{p!} x^p + r(R)$$

- Se f ammette derivate parziali fino all'indice $m+1$ in un intorno di x_0 , allora vale la formula con resto alla Lagrange

$$r(R) = \sum_{|p|=m+1} \frac{D^p f(c)}{p!} x^p$$

con c nel segmento tra x_0 e $x_0 + R$ (c'è lo stesso per tutti i p)

- Se f ammette derivate parziali fino all'indice $m-1$ in un intorno di x_0 e tutte le derivate di indice $m-1$ sono diff. in x_0 , allora vale la formula con resto alla Peano

$$r(R) = o(|R|^m) \quad \text{per } R \rightarrow 0$$

(Dimostrata alla lezione 10 supponendo però che anche le $D^p f(x_0)$ con $|p|=m$ esistessero nell'intorno come funzioni continue)

Passi della dim. del Peano vero

Lemma (esercizio) Supponiamo per una funzione di 2 variabili che f_x e f_y esistano in un intorno di (x_0, y_0) e siano diff. in (x_0, y_0) . Allora $f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0)$.

Dal Lemma segue che nelle ipotesi di Taylor Peano le derivate con $|p|=m$ non dipendono dall'ordine di esecuzione, quindi per lo meno posso scrivere il polinomio di Taylor di ordine m .

Lemma 2 (Esercizio) Il polinomio di Taylor dato dalla formula ha la proprietà che le sue derivate in 0 coincidono con quelle di f in x_0 fino all'ordine n .

[Sarebbe che $D^q x^p$ calcolata in $x=0$ vale 0 se $q \neq p$ e vale $p!$ se $q=p$].

Ora procedo come ad Analisi 1: considero $\varphi(x) = f(x) - \text{polinomio}$
o meglio $\varphi(h) = f(x_0+h) - \text{polinomio}$
e abbiamo che φ ha tutte le derivate nulle fino all'ordine n .

Lemma finale Se $\varphi(x)$ ha tutte le derivate nulle fino all'ordine n ,
allora $\varphi(x) = o(|x|^n)$ per $x \rightarrow 0$
(ossia: tutte le derivate fino all'ordine $n-1$ esistono in un intorno di 0 e quelle di ordine $n-1$ sono diff. in $x=0$).

Dim. Si fa per induzione!

$n=0$ è banale

$n=1$ è la definizione di differenziale

Facciamo il passaggio induttivo da $(n-1)$ a n .

Prendo f come nelle ipotesi e applico il passo induttivo a tutte le sue derivate parziali prime. Ne deduco che

$$D^p f(x) = o(|x|^{n-1}) \quad \text{per ogni } |p|=1$$

Da cui segue che

$$|\nabla f(x)| = o(|x|^{n-1}) = |x|^{n-1} \omega(x)$$

Ora applico Lagrange direzionale:

$$|f(x) - f(0)| = |\langle \nabla f(c), x \rangle| \leq |\nabla f(c)| \cdot |x| = \underbrace{|x| \cdot |c|^{n-1}}_{\leq |x|^n} \underbrace{|\omega(c)|}_{\substack{\downarrow \\ \text{nel senso} \\ \text{di } \mathbb{R}^n}}$$

e questo chiude la dimostrazione.

RIPASSO SULLE FORME QUADRATICHE

Def. Una forma quadratica in n variabili è una somma di monomi di 2° grado nelle n variabili

$$q(x) = \sum_{|q|=2} a_q x^q = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} a_{ij} x_i x_j$$

$\uparrow$
coeff.

Esempio In 3 variabili $q(x, y, z) = x^2 - 7z^2 + 5xy + 3yz$

Def. Una forma quadratica si dice

- definita positiva se $q(x) > 0$ per ogni $x \neq 0$
- semidefinita positiva se $q(x) \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n$
- def. neg. $q(x) < 0$
- semidef. neg. $q(x) \leq 0$
- indefinita se non è nessuno dei precedenti, cioè
 $\exists x \in \mathbb{R}^n \quad q(x) > 0 \quad \exists y \in \mathbb{R}^n \quad q(y) < 0.$

Segnatura Ad ogni forma quadratica è associata una terna di interi (m_0, m_+, m_-) o (i_0, i_+, i_-) con $i_0 + i_+ + i_- = n$ detti segnatura della forma.

Da questi si deduce in quali casi ci troviamo

La forma è

- def. positiva $\Leftrightarrow i_0 = i_- = 0$ e $i_+ = n$
- " negativa $\Leftrightarrow i_0 = i_+ = 0$ e $i_- = n$
- semidef. pos. $\Leftrightarrow i_- = 0$
- " neg. $\Leftrightarrow i_+ = 0$
- indefinita $\Leftrightarrow i_+ > 0$ e $i_- > 0.$

Fatto importantissimo

- Se $q(x)$ è definita positiva, allora esiste $m > 0$ tale che
$$q(x) \geq m |x|^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$
- Se $q(x)$ è definita negativa, allora esiste $m > 0$ tale che
$$q(x) \leq -m |x|^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

aggiunto dopo video

Metodi per calcolare la segnatura.

- ① Con gli autovalori. Alla forma associa una matrice M simmetrica, che dunque ha autovalori reali, quindi

$m_0 = \#$ autor. nulli

$m_+ = \#$ " > 0

$m_- = \#$ " < 0

} contati con molteplicità

- ② Completamento dei quadrati. Scrivo q come somma / differenza di espressioni Quad. ind. A quel pto

$m_+ =$ numero di espressioni con il segno $+$

$m_- =$ " " " " " " " $-$

- ③ Cartesio sul polinomio caratteristico. Scrivo il polinomio caratt.

$$p(x) = a_n x^n + \dots + a_k x^k \quad \text{con } a_k \neq 0$$

Allora

• $m_0 = k$

• $m_+ =$ numero di variazioni di segno nella successione dei coeff. non nulli di $p(x)$

• $m_- =$ si ottiene per differenza

- ④ Metodo dei minori orlati sulla diagonale (Sylvester).

Si può procedere in qualunque direzione

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}$$

1-2-3

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}$$

3-2-1

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}$$

1-3-2

Def. "vera" di segnatura

$i_0 = \dim \ker M = \dim.$ insieme dei vettori ortogonali a tutti gli
altri

$i_+ = \max$ dimensione di un sottospazio W su cui $q(x)$ è def. pos.

$i_- =$ " " " " " " " " " neg.
— o — o —