

Lagrange DIREZIONALE

Analisi 1: $f(b) - f(a) = (b-a) f'(c)$

In più variabili: $\underbrace{f(b) - f(a)}_{\text{numero}} = \langle \underbrace{b-a}_{\text{vettore}}, \underbrace{\nabla f(c)}_{\substack{\uparrow \\ \text{pto sul segmento di estremi} \\ a \text{ e } b}} \rangle$

Dim. Considero la restrizione al segmento

$$\varphi(t) = f(\underbrace{a + t(b-a)}_{\text{param. del segmento}})$$

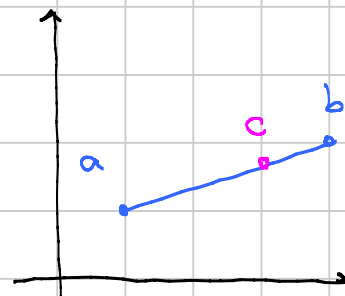
$$f(b) - f(a) = \varphi(1) - \varphi(0) = 1 \cdot \varphi'(t_0) \quad t_0 \in (0,1)$$

ma

$$\varphi'(t) = \langle \nabla f(a + t(b-a)), b-a \rangle \quad \text{da cui la tesi.}$$

↑
CHAIN RULE

— o — o —



Conseguenza 1 Sia $f: B_\delta(x_0) \rightarrow \mathbb{R}$. Supponiamo che $\nabla f = 0$ per ogni $x \in B_\delta(x_0)$.

Allora $f(x)$ è costante in $B_\delta(x_0)$.

Dim. $f(x) - f(x_0) = \langle x - x_0, \underbrace{\nabla f(c)}_0 \rangle = 0$ quindi $f(x) = f(x_0)$

Conseguenza 2 Sia $f: \overline{B}_\delta(x_0) \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione di classe C^1
↑
chiusa

(nota: si dice che $f \in C^k(A)$ se sono continue in A tutte le derivate $D^p f(x)$ con p multi-indice con $|p| \leq k$)

Allora f è Lipschitziana in $\overline{B}_\delta(x_0)$ e la costante di Lip. è

$$L = \max \{ |\nabla f(x)| : x \in \overline{B}_\delta(x_0) \}$$

Dim. $|f(b) - f(a)| = |\langle b-a, \nabla f(c) \rangle| \leq \underbrace{|b-a|}_{\substack{\uparrow \\ \text{C.S.}}} \cdot \underbrace{|\nabla f(c)|}_{\leq L}$

Questo dimostra che la costante L va bene. Bisognerebbe dimostrare che ogni costante più piccola di L non va bene.

Esercizio Se f è lip. in un insieme A e $x_0 \in \text{Int}(A)$ e $\nabla f(x_0)$ esiste, allora $|\nabla f(x_0)| \leq L \leftarrow$ costante che compare nella def. di f lip.

Dim. Preso un qualunque VETTORE v calcoliamo la derivata direzionale nel p.to x_0

$$\begin{aligned} |\langle \nabla f(x_0), v \rangle| &= \left| \frac{\partial f}{\partial v}(x_0) \right| = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|f(x_0 + hv) - f(x_0)|}{|h|} \leq L \\ &\quad \uparrow \\ &\quad f \text{ è diff. in } x_0 \\ &\leq \frac{|hv| \cdot L}{|h|} = L \text{ perché } |v| = 1 \end{aligned}$$

Quindi ora sappiamo che

$|\langle \nabla f(x_0), v \rangle| \leq L$ per ogni v tale che $|v| = 1$. Da questo voglio dedurre che $|\nabla f(x_0)| \leq L$.

Ci sono 2 casi:

- se $\nabla f(x_0) = 0$ non è molto difficile
- se $\nabla f(x_0) \neq 0$ uso $v = \frac{\nabla f(x_0)}{|\nabla f(x_0)|}$ (vettore che dice la direzione di $\nabla f(x_0)$) e ottengo

$$\langle \nabla f(x_0), \frac{\nabla f(x_0)}{|\nabla f(x_0)|} \rangle = \frac{1}{|\nabla f(x_0)|} \langle \nabla f(x_0), \nabla f(x_0) \rangle = |\nabla f(x_0)|$$

Domanda Quanto è importante che l'insieme di definizione sia $B_r(x_0)$

Per la conseguenza 1, basta che sia un aperto CONNESSO

Enunciato: Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto connesso, sia $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ diff. con $\nabla f(x) = 0$ per ogni $x \in A$. Allora f è costante in A .

Dim. Prendo a caso $x_0 \in A$ e pongo

$$B = \{x \in A : f(x) = f(x_0)\} \neq \emptyset$$

Vorrei dimostrare che $B = A$. Per far questo basta dimostrare che B è contemporaneamente aperto e chiuso (rispetto ad A).

Ora

- B è chiuso perché $B = f^{-1}(\{f(x_0)\})$, cioè f^{-1} (chiuso)
- B è aperto per quello detto prima come conseguenza 1. $\square$

— o — o —

Oss. Si può fare una dimostrazione da analisi 1 sfruttando un lemma che dice

"Un aperto $A \subseteq \mathbb{R}^n$ è connesso se e solo se è connesso per archi C^1 "

Per la conseguenza 2, esaminiamo questo enunciato:

Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto (limitato). Sia $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ diff. con

$$|\nabla f(x)| \leq L \quad \forall x \in A$$

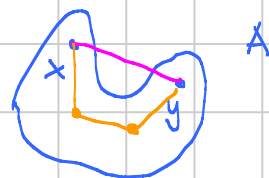
Allora

$$|f(x) - f(y)| \leq L |x - y| \quad \forall x \in A \quad \forall y \in A.$$

≠
A
L
S
O

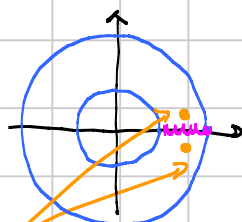
Idea: quando congiungo 2 pti x e y , la congiungente può "passare fuori".

Ovviamente posso fare il "giro lungo" e ottenere



$$|f(x) - f(y)| \leq L \cdot \text{lunghezza poligonale che congiunge } x \text{ e } y$$

Esempio burocratico

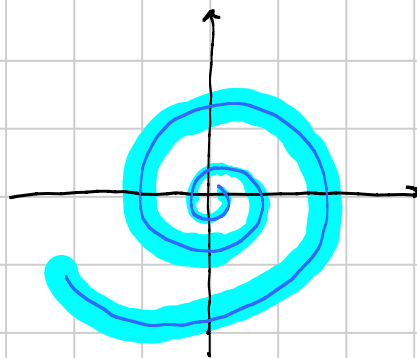


vicini di $\mathbb{R}^2$ con f continua. Il fatto è che sono continui in A .

A = corona circolare meno segmento lungo asse x

$f(x, y) = \theta$ quello delle coord. polari

Esempio perverso



$A =$ intorno di una
spirale che va a
 ∞

Se la spirale ha "lunghezza infinita" allora posso considerare una funzione con $|\nabla f| \leq 1$ che "sale lungo la spirale".

Questa non è Lip. e NEPPUR LIMITATA.

— 0 — 0 —