

FORMULA DI TAYLOR IN PIÙ VARIABILI

Analisi 1

$$f(x_0 + R) = \underbrace{\sum_{k \leq n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} R^k}_{\text{polinomio di Taylor di ordine } n} + r(R)$$

dove

- (Peano) $r(R) = o(R^n)$ per $R \rightarrow 0$ [Ipotesi: $n-1$ derivate nell'intervallo derivata n -esima nel punto]
- (Lagrange) $r(R) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} R^{n+1}$ con c che sta fra x_0 e $x_0 + R$ [Ipotesi: $n+1$ derivate nell'intervallo]

Analisi 2

$$f(x_0 + R) = \sum_{|p| \leq n} \frac{D^p f(x_0)}{p!} R^p + r(R)$$

Sotto ci sta il formalismo dei MULTI-INDICI.

Un multiindice p è una n -upla $(p_1, \dots, p_n)$ di naturali.

Si pone

- $|p| = p_1 + \dots + p_n$
- $p! = p_1! \cdot \dots \cdot p_n!$
- Se $R = (R_1, \dots, R_n)$ è un vettore, allora $R^p = R_1^{p_1} \cdot \dots \cdot R_n^{p_n}$
- $D^p f = \partial_{x_1}^{p_1} \cdot \dots \cdot \partial_{x_n}^{p_n} =$ derivata parziale di ordine $|p|$

Oss. Con i multiindici si scrive bene la potenza di un k -monio

$$(x_1 + \dots + x_k)^n = \sum_{|p|=n} \frac{n!}{p!} x^p$$

↑
multiindici con k componenti

Volevamo

$$x_1 + \dots + x_k = \sum_{|p|=1} x^p$$

Casi particolari del polinomio di Taylor

2 variabili, ordine 3, centro in $(x_0, y_0) = (0, 0)$

$$f(x, y) = f(0, 0)$$

termine di ordine 0

$$+ f_x(0, 0)x + f_y(0, 0)y$$

termine di 1° grado

$$+ \frac{1}{2!} [f_{xx}(0, 0)x^2 + 2f_{xy}(0, 0)xy + f_{yy}(0, 0)y^2]$$

2° grado

$$+ \frac{1}{3!} [f_{xxx}(\dots)x^3 + 3f_{xxy} \cdot x^2y + 3f_{xyy}xy^2 + f_{yyy}y^3]$$

3° grado

In 2 variabili i termini di ordine k sono come aver ultrabrutalmente sviluppato

$$\frac{1}{k!} (f_x x + f_y y)^k$$

In n variabili è la stessa cosa solo con $(x_1 \partial_{x_1} + \dots + x_n \partial_{x_n})^k \frac{1}{k!}$

Forme del resto

- Alla Peano: $r(R) = o(|R|^n)$ [Ipotesi: deriv. par. di ordine $n-1$ nell' intorno e di ordine n nel punto]
- Alla Lagrange: $r(R) = \sum_{|p|=n+1} \frac{D^p f(c)}{p!} R^p$

formula

dove c è un punto nel segmento congiungente x_0 e $x_0 + R$

[Ipotesi: deriv. parziali di ordine $n+1$ nell' intorno]

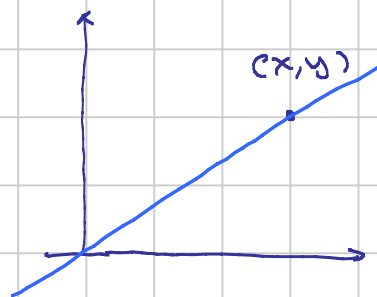
"Dim." Slogan: è un fatto uno-dimensionale !!

Per semplicità considero il caso di 2 variabili.

$f(x, y)$ e voglio sviluppare in $(0, 0)$.

Considero, fissati x e y , la funzione

$$\varphi(t) = f(tx, ty)$$



La funzione φ è derivabile tante volte quanto f e avrà un suo sviluppo di Taylor-Lagrange

$$\varphi(t) = \sum_{k \leq m} \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} t^k + \frac{\varphi^{(m+1)}(c)}{(m+1)!} t^{m+1}$$

Ponendo $t=1$ otteniamo

$$f(x,y) = \varphi(1) = \sum_{k \leq m} \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} + \frac{\varphi^{(m+1)}(c)}{(m+1)!}$$

Resta da capire chi sono $\varphi^{(k)}(0)$. Vediamo a mano

$$\varphi^{(0)}(0) = f(0,0)$$

$$\varphi'(t) = f_x(tx, ty)x + f_y(tx, ty)y$$

CHAIN
RULE

$$\text{quindi } \varphi'(0) = f_x(0,0)x + f_y(0,0)y$$

$$\varphi''(t) = f_{xx}(tx, ty)x^2 + f_{yx}(tx, ty)xy + f_{xy}(tx, ty)xy + f_{yy}(\dots)y^2$$

← uguali →

$$\varphi''(0) = f_{xx}(0,0)x^2 + 2f_{xy}(0,0)xy + f_{yy}(0,0)y^2$$

e così via per gli ordini successivi.

Questo dimostra Taylor-Lagrange modulo fare per inoltre la formula per $\varphi^{(k)}(t)$.

— o — o —

La dim. di Taylor Peano non si può fare allo stesso modo usando Taylor-Peano sulla $\varphi(t)$.

Ad Anolisi 1 posso dim. TP usando TL.

Dim. Voglio TP di ordine n . Scrivo TL di ordine $n-1$

$$f(x_0+h) = \sum_{k \leq n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} h^k + \frac{f^{(n)}(x_0+c)}{n!} h^n$$

Se so che $f^{(n)}$ è continua in x_0 , allora posso aggiungere e togliere

$$\underbrace{\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} R^n}_{\downarrow} + \boxed{\frac{f^{(n)}(x_0+c) - f^{(n)}(x_0)}{n!} R^n}$$

Termine che manca
per la sommatoria

" $O(R^n)$ " se so che $f^{(n)}(x)$ esiste in
un intorno ed è continua in x_0

Questo dimostra TP assumendo che $f^{(n)}(x)$ esista in un intorno
e sia continua in x_0 e si estende anche in più variabili.

— o — o —

Oss. Praticamente i pol. di Taylor si calcolano sfruttando quelli
in una variabile.

$$f(x,y) = x \sin y + \cos(xy)$$

Taylor di ordine 6

$$= x \left(y - \frac{1}{6} y^3 + \frac{1}{120} y^5 \right) + 1 - \frac{1}{2} x^2 y^2 + O((x^2+y^2)^3)$$

$$\uparrow \\ |(x,y)|^6$$

= distanza da' p.to
alla sesta.