

Lemma Sia M una matrice $m \times n$. Allora esiste una costante C tale che

$$\underbrace{|Mx|}_{\mathbb{R}^m} \leq C \underbrace{|x|}_{\text{in } \mathbb{R}^n} \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

↑
stessa per tutti gli x

(altro modo di dire la stessa cosa: le applicazioni lineari sono Lipschitziane, infatti

$$|Mx - My| = |M(x-y)| \leq C|x-y|$$

Dim Caso semplice in cui $m=1$, per cui M è un vettore riga e Mx vuol dire prodotto scalare tra M ed x

$$|Mx|^2 = |\langle M, x \rangle|^2 \leq \underbrace{|M|^2}_{\text{somma dei quadrati di tutti i termini}} \cdot |x|^2$$

Nel caso generale le componenti di Mx sono i prodotti scalari tra le righe di M e x , quindi

$$|Mx|^2 = \underbrace{\langle R_1, x \rangle^2}_{\text{righe di } M} + \dots + \underbrace{\langle R_m, x \rangle^2}_{\text{righe di } M}$$

$$\leq |R_1|^2 \cdot |x|^2 + \dots + |R_m|^2 \cdot |x|^2$$

$$= |x|^2 \underbrace{(|R_1|^2 + \dots + |R_m|^2)}_{C^2}$$

= Somma dei D di tutti i termini della matrice
= "norma" della matrice.

— o — o — o —

Osservazione sulla composizione

$$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k \quad R = g \circ f$$
$$g: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m$$

$$\frac{\partial R_j}{\partial x_i} = \frac{\partial g_j}{\partial y_1} \frac{\partial f_1}{\partial x_i} + \frac{\partial g_j}{\partial y_2} \frac{\partial f_2}{\partial x_i} + \dots + \frac{\partial g_j}{\partial y_k} \frac{\partial f_k}{\partial x_i}$$

$R_j = g_j(f_1(x), \dots, f_k(x))$

termine di posto riga j , colonna i nella matrice BA e quel termine è il prodotto scalare tra la riga j -esima di B e la colonna i -esima di A , che è proprio il RHS.

Esempio 1 $f(x, y) = x^2 + 3xy + y^4$

$$t \xrightarrow{g} \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix}$$

$x(t) \quad y(t)$

$$\varphi(t) = f(x(t), y(t)) \quad \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

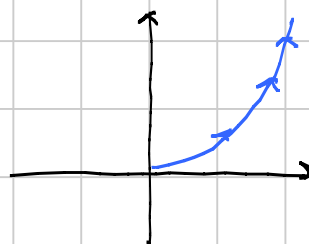
$$\varphi'(t) = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t}$$

↑
CHAIN RULE

$$f_x = 2x + 3y$$
$$f_y = 3x + 4y^3$$

$$= (2x(t) + 3y(t)) x'(t) + (3x(t) + 4y(t)^3) y'(t)$$

$$= (2t + 3t^2) \cdot 1 + (3t + 4t^6) \cdot 2t$$



Per riprova, fare il conto nell'altro modo:

$$\varphi(t) = f(x(t), y(t)) = t^2 + 3t^3 + t^8 \quad \text{e quindi}$$
$$\varphi'(t) = 2t + 9t^2 + 8t^7 \quad \text{viene lo stesso nell'altro modo.}$$

— o — o —

Esempio 2 Coordinate polari.

Descrivo una funzione in coordinate polari

$$f(p, \theta) = p^2 \cos \theta$$

Domanda: calcolare le derivate parziali rispetto a x e y

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \underbrace{\frac{\partial f}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial x}}_{\text{Dall'espressione}} + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial x}}_{\text{si calcolano dalle formule per le coordinate polari}}$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} \text{ e } \frac{\partial \theta}{\partial x}$$

si calcolano dalle formule per le coordinate polari

Esempio 3 Data $f(x, y)$, trovare $\frac{\partial f}{\partial p}$ e $\frac{\partial f}{\partial \theta}$ $x = p \cos \theta$
 $y = p \sin \theta$

$$\frac{\partial f}{\partial p} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial p} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial p} = f_x \cdot \cos \theta + f_y \sin \theta$$

$$\frac{\partial f}{\partial \theta} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \theta} = f_x p(-\sin \theta) + f_y p \cos \theta$$

$$f_p^2 = f_x^2 \cos^2 \theta + f_y^2 \sin^2 \theta + 2 f_x f_y \cos \theta \sin \theta$$

$$f_\theta^2 = p^2 f_x^2 \sin^2 \theta + p^2 f_y^2 \cos^2 \theta - 2 p^2 f_x f_y \cos \theta \sin \theta$$

$$f_x^2 + f_y^2 = f_p^2 + \frac{1}{p^2} f_\theta^2$$

norma² del gradiente
in coordinate
cartesiane / polari

Verifica $f(x, y) = y + x^2 = p \sin \theta + p^2 \cos^2 \theta$

$$|\nabla f|^2 = f_x^2 + f_y^2 = (2x)^2 + 1 = 4x^2 + 1 = 4p^2 \cos^2 \theta + 1$$

$$|\nabla f|^2 = f_p^2 + \frac{1}{p^2} f_\theta^2 = (\sin \theta + 2p \cos^2 \theta)^2 + \frac{1}{p^2} (p \cos \theta - p^2 \cos \theta \sin \theta)^2$$

= sviluppando dovrebbe venire uguale.

— o — o —

Esercizio

Come sono fatte tutte le funzioni $f(x,y)$ tali che

$$f_x(x,y) = f_y(x,y) \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

Esempi: $f(x,y) = \text{costante}$

$$f(x,y) = ax + ay$$

$$f(x,y) = x^2y + xy^2$$

$$f_x = 2xy + y^2 \quad f_y = x^2 + 2xy$$

$$f(x,y) = x^2 + y^2 + 2xy$$

$$f(x,y) = g(x+y) \quad f_x = g'(x+y) \quad f_y = g'(x+y)$$

$$g(2x+3y)$$

$$f_x = g'(2x+3y) \cdot 2$$

$$f_y = g'(2x+3y) \cdot 3$$

Congettura: sono tutte e sole le funzioni del tipo $g(x+y)$ con $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile.

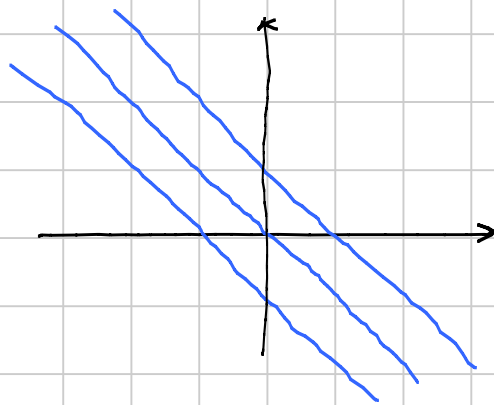
Si tratta di dimostrare che sono costanti su tutte le rette // alla $y = -x$. A quel p.to pongo

$$g(x) = f(x, 0) \text{ e ho che}$$

$$f(x,y) = f(x+y, 0) = g(x+y)$$

$\uparrow$
 f è costante sulle rette //

$\uparrow$
def. di g



Come sono fatte le rette? Sono del tipo $(t, k-t)$

Devo dim. che $\varphi(t) = f(t, k-t)$ è costante

$$\varphi'(t) = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t}$$

$\uparrow$
CHAIN RULE

$$= f_x(t, k-t) \cdot 1 + f_y(t, k-t) \cdot (-1)$$

$$= 0 \text{ per ipotesi, quindi } \varphi(t) = \text{costante.}$$

— 0 — 0 —