

Diff. in più variabili

$$f(x_0 + R) = f(x_0) + L R + o(|R|)$$

↑
app. lineare

per $R \rightarrow 0$

limite in n
variabili

Teorema del differenziale totale

Brutalmente: se le derivate parziali esistono e sono continue, allora f è differenziabile

Sia $x_0 \in \mathbb{R}^n$, sia $\delta > 0$ e sia f definita in un intorno di x_0 e raggio δ ($B_\delta(x_0)$) a valori in $\mathbb{R}$.

Supponiamo che

(i) le derivate parziali esistono in $B_\delta(x_0)$

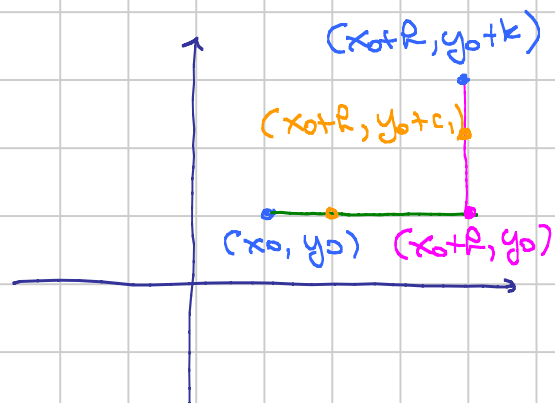
(ii) " " sono continue in x_0 .

Allora f è diff. in x_0 .

Dim. in 2 variabili $x_0 \rightsquigarrow (x_0, y_0)$

$$f(x_0 + R, y_0 + k) - f(x_0, y_0) =$$

$$= f(x_0 + R, y_0 + k) - f(x_0 + R, y_0) + \\ + f(x_0 + R, y_0) - f(x_0, y_0)$$



Applico Lagrange uno-dimensionale alla prima e alla seconda riga

$$= k f_y(x_0 + R, y_0 + c_1) \\ + R f_x(x_0 + c_2, y_0)$$

Lagrange su $\varphi(t) = f(x_0 + R, t)$
 $\varphi(y_0 + k) - \varphi(y_0) = k \varphi'(c)$

$$= \underbrace{k f_y(x_0, y_0) + R f_x(x_0, y_0)}_{\langle (k, R), \nabla f(x_0, y_0) \rangle} + k [f_y(x_0 + R, y_0 + c_1) - f_y(x_0, y_0)] \\ + R [f_x(x_0 + c_2, y_0) - f_x(x_0, y_0)]$$

spero che sia $o(\sqrt{R^2 + k^2})$

Dico che ciascuno dei due termini è $o(\sqrt{R^2+k^2})$. Guardo il 1°

$$\frac{|k| |f_y(x_0+R, y_0+c_1) - f_y(x_0, y_0)|}{\sqrt{R^2+k^2}} \leq \underbrace{|f_y(x_0+R, y_0+c_1) - f_y(x_0, y_0)|}_{\substack{\downarrow \\ \text{perché ho assunto che } f_y \\ \text{fosse continua in } (x_0, y_0) \\ \text{e } (x_0+R, y_0+c_1(k)) \rightarrow (x_0, y_0) \\ \text{per } (R, k) \rightarrow (0, 0)}}$$

≤ 1

Il secondo termine si tratta allo stesso modo.

Osservazioni

- Nel caso generale (n variabili) la dim. è la stessa, solo bisogna togliere n termini.
- Più elegante: evoluzione su n (esercizio di formalizzazione)
- Ho usato per Lagrange l'esistenza di f_x e f_y in tutto un intorno.

Teorema (in ipotesi più risparmiose) Si possono risparmiare le ipotesi su f_x

$$f(x_0+R, y_0) - f(x_0, y_0)$$

So che $f_x(x_0, y_0)$ esiste, quindi per analisi 1 posso scrivere

$$f(x_0+R, y_0) - f(x_0, y_0) = \underbrace{f_x(x_0, y_0) R}_{\text{termine che volevo}} + \underbrace{R w(R)}_{\substack{\text{banalmente} \\ o(\sqrt{R^2+k^2})}}$$

$$\lim_{(R,k) \rightarrow (0,0)} \frac{|R w(R)|}{\sqrt{R^2+k^2}} \leq \lim_{(R,k) \rightarrow (0,0)} |w(R)| = 0$$

Quindi ho dimostrato il teorema in 2 variabili assumendo:

(i) f_y esiste nell'intorno ed è continua in (x_0, y_0)

(ii) f_x esiste solo in (x_0, y_0) .

In n variabili posso assumere

(i) $m-1$ derivate esistono nell'intorno e continue nel p.to

(ii) L'altra derivata esiste solo nel p.to.

1 0 1 0 1

Teorema (Derivata della funzione composta)

Sia $D \subseteq \mathbb{R}^m$, sia $f: D \rightarrow \mathbb{R}^k$

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^k$, sia $g: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$

$$\mathbb{R}^3 \xrightarrow{f} \mathbb{R}^k \xrightarrow{g} \mathbb{R}^m$$

Supponiamo D ed Ω aperti e supponiamo che $f(D) \subseteq \Omega$.

Così posso definire $\tilde{Q} = g \circ f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$.

Sia $x_0 \in D$ e sia $y_0 = f(x_0) \in \Omega$.

Supponiamo f differenziabile in x_0 con matrice jacobiana A

" g " " y " " " B.

Allora Q è differenziabile in x_0 con matrice jacobiana BA

Dici. Scriviamo le ipotesi

$$f(x_0 + R) = f(x_0) + AR + r_f(R)$$

$$\lim_{R \rightarrow 0} \frac{|r_f(R)|}{|r|} = 0$$

$$g(y_0+k) = g(y_0) + Bk + \mathcal{L}_g(k)$$

$$\lim_{k \rightarrow 0} \frac{|\log(k)|}{|k|} = 0$$

Lavoro con $R = g \circ f$

$$g(f(x_0 + R)) = g(\underbrace{f(x_0)}_{y_0} + \underbrace{AR + r_f(R)}_k)$$

$$= g(y_0) + B(A\mathcal{R} + \mathcal{I}_f(\mathcal{R})) + \mathcal{I}_g(A\mathcal{R} + \mathcal{I}_f(\mathcal{R}))$$

$$= \underbrace{g(y_0)}_{\substack{\text{g}(f(x_0)) \\ \text{ok!}}} + \underbrace{BAR}_{\substack{\uparrow \\ \text{termine} \\ \text{lineare due volte}}} + Bz_f(R) + r_g(AR + r_f(R))$$

Ma senza due dei altri 2 termini siamo $O(121)$

1° termine $\lim_{R \rightarrow 0} \frac{|B_{1\varphi}(R)|}{|R|}$

Un lemma misterioso dice che: data una matrice M esiste una costante C tale che $|Mx| \leq C|x|$ per ogni $x \in \text{spazio di partenza}$

Dato il lemma misterioso $\frac{|B_{1\varphi}(R)|}{|R|} \leq \frac{C|1\varphi(R)|}{|R|} \xrightarrow{\text{per } R_p \text{ su } 1\varphi} 0$

2° termine: cosa vorrei fare

$$\frac{|r_g(AR + 1\varphi(R))|}{|R|} = \frac{|r_g(AR + 1\varphi(R))|}{|AR + 1\varphi(R)|} \cdot \frac{|AR + 1\varphi(R)|}{|R|}$$

$\downarrow$ per l'ipotesi su r_g limitato
 $\leq \frac{C|R| + |1\varphi(R)|}{|R|}$

L'unico problema è che potrei aver diviso per 0.

→ uscita 1: considerare la funzione $\frac{|r_g(R)|}{|R|}$ estesa ponendo la 0 (o anche 15) per $k=0$

→ uscita 2: lemma della sotto-sotto. Basta dimostrare che ogni successione $R_n \rightarrow 0$ ha una s.succ. in cui il limite fa 0. (il limite del 2° termine)

D'altra parte, ogni succ. $R_n \rightarrow 0$ ha una sottosucc. in cui

- o $AR_n + 1\varphi(R_n) \neq 0$, e allora faccio quello che ho fatto
- o $AR_n + 1\varphi(R_n) = 0$, ma se $k=0$, allora il termine non c'è nemmeno.

Osservazione: sono le stesse uscite che c'erano ad Analisi 1.

— 0 — 0 —