

"Derivate" per funzioni di più variabili

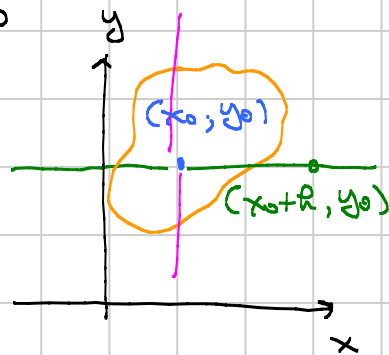
Derivata $f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$

Differenziale $f(x_0+h) = f(x_0) + \alpha h + o(h)$
 $\alpha = f'(x_0)$

In una variabili le 2 nozioni sono equivalenti

$D \subseteq \mathbb{R}^2$, $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $(x_0, y_0) \in D$ p.to INTERNO

$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$
 se esiste ed è reale



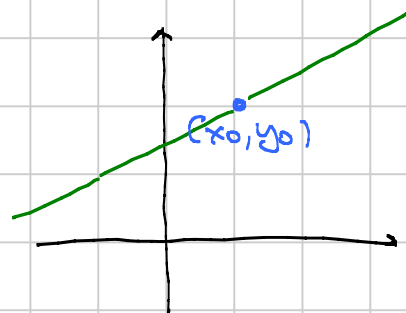
Se esiste, si chiama DERIVATA PARZIALE di $f(x, y)$ rispetto alla variabile x nel p.to (x_0, y_0)

$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0+h) - f(x_0, y_0)}{h} = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$
 se esiste ed è reale

... rispetto a y ...

DERIVATA DIREZIONALE: andare lungo una qualunque retta

Fissato un qualunque vettore $\vec{v} = (v_1, v_2)$ non nullo, cioè $v_1^2 + v_2^2 \neq 0$, posso provare a calcolare



$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+v_1h, y_0+v_2h) - f(x_0, y_0)}{h} = \frac{\partial f}{\partial v}(x_0, y_0)$
 se esiste ed è reale

Si chiama DERIVATA di f lungo la direzione v nel pto (x_0, y_0)

Oss. La derivata direzionale si può definire

- rispetto a tutti i $v \neq 0$
- rispetto ai soli vettori ($|v|=1$)

Bastano quelle definite nel secondo modo per "catturare" tutte le possibili rette per (x_0, y_0) .

— o — o —

Def. formali in $\mathbb{R}^n$ $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in \text{Int}(D)$.

Dato $v \neq 0$

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h v) - f(x_0)}{h}$$

↑
se esiste $h \in \mathbb{R}$

Le derivate parziali sono derivate direzionali con $v =$ uno dei vettori della base canonica

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h e_i) - f(x_0)}{h}$$

↑
se esiste $h \in \mathbb{R}$

i -esima
↓
 $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$

— o — o —

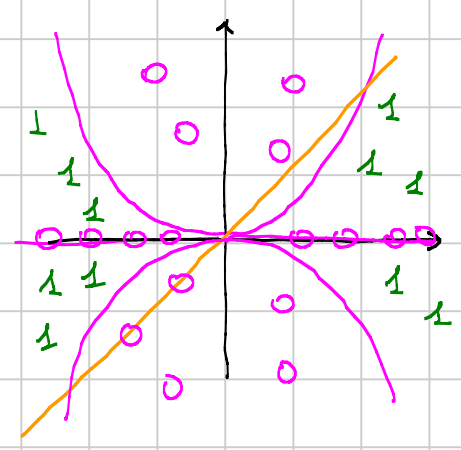
Sorpresona: in più variabili possono esistere tutte le derivate direzionali in x_0 senza che f sia continua in x_0

Esempio 1 $D = \mathbb{R}^2$, $(x_0, y_0) = (0, 0)$

Chiaramente $f(x, y)$ non è continua in $(0, 0)$.

Tuttavia, tutte le derivate direzionali esistono e sono nulle in $(0, 0)$.

Su ogni retta infatti $f(x, y)$ è identicamente nulla vicino all'origine.



Esempio 2

$$f(x,y) = \begin{cases} \left(\frac{x^2 y}{x^4 + y^2} \right)^2 & \text{per } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{per } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Il limite in $(0,0)$ non esiste (basta andare sulle parabole).
Tutte le derivate direzionali esistono e sono nulle.

Preso $v = (a,b)$

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{f(a\rho, b\rho) - f(0,0)}{\rho} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{1}{\rho} \left(\frac{a^2 \rho^2 b \rho}{a^4 \rho^4 + b^2 \rho^2} \right)^2$$

$$= \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{1}{\cancel{\rho}} \frac{a^4 b^2 \cancel{\rho^2}}{\cancel{\rho^4} (a^4 \rho^2 + b^2)^2} = 0 \quad \text{se } b \neq 0$$

Se $b = 0$ vuol dire che sto facendo $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ e questa è nulla perché la frazione è sempre nulla in quel caso

Oss. geometrica fare $\frac{\partial f}{\partial v}(x_0)$ è equivalente a fare la derivata

in $t=0$ della funzione $\varphi(t) = f(x_0 + tv)$, cioè la restrizio-
ne di f alla retta $x_0 + tv$

Notazioni Le derivate parziali / direzionali si indicano
così: differentemente come

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0)$$

$$f_x(x_0)$$

$$D_x f(x_0)$$

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0)$$

$$f_v(x_0)$$

— 0 — 0 —

Le derivate parziali / direzionali si comportano male perché
sono equivalenti a muoversi lungo le sole rette.

DIFFERENZIALE IN PIÙ VARIABILI

$D \subseteq \mathbb{R}^2$, $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $(x_0, y_0) \in \text{Int}(D)$.

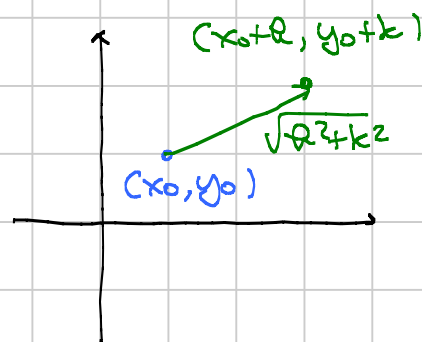
$$f(x_0 + R, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + \underbrace{\alpha R + \beta k}_{(\alpha, \beta) \cdot (R, k)} + \underbrace{o(\sqrt{R^2 + k^2})}_{r(R, k)}$$

Dico che f è differentiabile in (x_0, y_0) se esistono due numeri α e β tali che vale la formula di sopra.

L'0 piccolo vuol dire che

$$\lim_{(R, k) \rightarrow (0, 0)} \frac{r(R, k)}{\sqrt{R^2 + k^2}} = 0$$

limite di una funzione di due variabili



Def. formale in n variabili

$D \subseteq \mathbb{R}^n$, $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in \text{Int}(D)$

Dico che f è diff. in x_0 se esiste un vettore α t.c.

$$f(x_0 + R) = f(x_0) + \alpha \cdot R + o(|R|)$$

prodotto scalare
di vettori

norma del
vettore R

$$o(|R|) = r(R) \quad \text{con} \quad \lim_{R \rightarrow 0} \frac{r(R)}{|R|} = 0$$

limite in n variabili

Osservazione L'applicazione $R \rightarrow \alpha \cdot R = \langle \alpha, R \rangle$ è
un'applicazione lineare da $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

Def ancora più generale $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $x_0 \in \text{Int}(D)$, $f: D \rightarrow \mathbb{R}^m$

Si dice che f è diff. in x_0 se esiste un'applicazione lineare

$$L: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

tale che

$$\underbrace{f(x_0 + h)}_{\in \mathbb{R}^m} = \underbrace{f(x_0)}_{\in \mathbb{R}^m} + \underbrace{Lh}_{\in \mathbb{R}^m} + \underbrace{o(|h|)}_{\substack{\text{norma in } \mathbb{R}^m \\ \text{norma in } \mathbb{R}^m}}$$

$M_{m,n}$ $\mathbb{R}^n$

solo che ora

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|o(h)|}{|h|} = 0$$

norma in $\mathbb{R}^m$
norma in $\mathbb{R}^m$