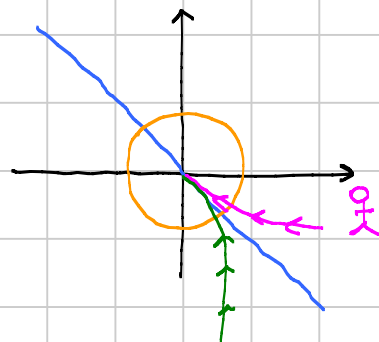


Esempio 1 $f(x,y) = \frac{x^4 + y^5}{x^3 + y^3} \quad (x,y) \rightarrow (0,0)$

Non esiste! f è definita in $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq -x\}$

Idea: in ogni $B_r(0)$ esistono p.ti della retta diversi dall'origine. Vicino a quei p.ti $f(x,y)$ assume valori enormi o enorm. negativi



Formalmente: $\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t, -t + t^2) =$

$$= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t^4 + (-t + t^2)^5}{t^3 + (-t + t^2)^3} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t^4 + o(t^4)}{\cancel{t^3} - \cancel{t^3} + 3t^4 + o(t^4)} = \frac{1}{3}$$

Se invece vado lungo l'asse x : $\lim_{t \rightarrow 0} f(t, 0) = \frac{t^4}{t^3} = 0$

Quindi il limite non esiste. Analogamente

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t, -t + t^4) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t^4 + o(t^4)}{t^3 - t^3 + 3t^6 + o(t^4)} = +\infty$$

Quindi $\limsup_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = +\infty$

Per vedere che $\liminf_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = -\infty$ uso $f(t, -t - t^4)$

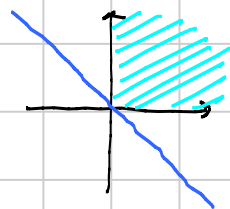
Esempio 2 Stessa $f(x,y) = \frac{x^4 + y^5}{x^3 + y^3}$ all'infinito

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t, 0) = \lim_{t \rightarrow +\infty} t = +\infty \Rightarrow \limsup = +\infty$$

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} f(t, 0) = \lim_{t \rightarrow -\infty} t = -\infty \Rightarrow \liminf = -\infty$$

Esempio 3 Stessa $f(x,y) = \frac{x^4+y^5}{x^3+y^3}$, $(x,y) \rightarrow (0,0)$
 ristretta a $D = 1^o$ quadrante

Qui il limite è 0 e lo dim. con le coord. polari



$$f(x,y) = \frac{\rho^4 \cos^4 \theta + \rho^5 \sin^5 \theta}{\rho^3 (\cos^3 \theta + \sin^3 \theta)} = \rho \frac{\cos^4 \theta + \rho \sin^5 \theta}{\cos^3 \theta + \sin^3 \theta}$$

Per $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ la funzione $\cos^3 \theta + \sin^3 \theta$ ha un minimo $m > 0$
 ($\cos \theta$ e $\sin \theta$ sono ≥ 0 in $[0, \frac{\pi}{2}]$ e non si annullano insieme)

$$0 \leq \left| \frac{\cos^4 \theta + \rho \sin^5 \theta}{\cos^3 \theta + \sin^3 \theta} \right| \leq \rho \cdot \frac{1}{m} + \rho^2 \frac{1}{m} \quad \text{e da qui si chiude.}$$

Esempio 4 $(x,y) \rightarrow (0,0)$ $f(x,y) = \frac{x^2 |y|^\alpha}{x^{16} + y^{16}}$

Studiamo al variare di α . Il limite esiste ed è uguale a 0 se e solo se $\alpha > 14$. Infatti in polari

$$\frac{\rho^{2+\alpha} (\cos^2 \theta |\sin \theta|^\alpha)}{\rho^{16} (\cos^{16} \theta + \sin^{16} \theta)}$$

$\geq m > 0$

e quindi fine come sempre

Esempio 5 $(x,y) \rightarrow (0,0)$ $f(x,y) = \frac{x^2 |y|^\alpha}{x^{10} + y^{16}}$

Idea: PAREGGIARE GLI ESPONENTI!

Ad esempio uso la curva (t^8, t^5)

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t^8, t^5) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^{16} |t^{52}|}{2 t^{80}}$$

Quindi le cose cambiano quando $5\alpha + 16 = 80$; $5\alpha = 64$, $\alpha = \frac{64}{5}$

Cosa ho dimostrato? Che per $\alpha \leq \frac{64}{5}$ il limite non esiste
 (sull'asse x o y fa 0, e sulla curva strana No)

Resta da dim che per $\alpha > \frac{64}{5}$ esiste e fa 0.

Faccio un cambio di variabili $x = z^8$
 $y = w^5$

Se posso fare il cambio il limite diventa

$$\lim_{(z,w) \rightarrow (0,0)} \frac{z^{16} |w|^{5\alpha}}{z^{80} + w^{80}}$$

e questo si fa bene con le polari

Fatto che ci sta sotto: $(x,y) \rightarrow (0,0)$ se e solo se $(z,w) \rightarrow (0,0)$.
Cioè se $x^2 + y^2 \leq R$ allora $z^2 + w^2 \leq R$, e viceversa.

Osservazione Nel momento in cui pongo $x = z^8$ perdo informazione, cioè sto facendo il limite solo per $x > 0$.
Dovrei poi fare la stessa cosa ponendo $x = -z^8$ e questo fa il limite per $x < 0$.
— 0 — 0 —

Esempio 6 Sia $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua t.c.

$$\limsup_{x^2+y^2 \rightarrow +\infty} f(x,y) = +\infty$$

$$\liminf_{x^2+y^2 \rightarrow +\infty} f(x,y) = -\infty$$

Tesi: allora $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ l'equazione $f(x,y) = \lambda$ ha ∞ soluz.

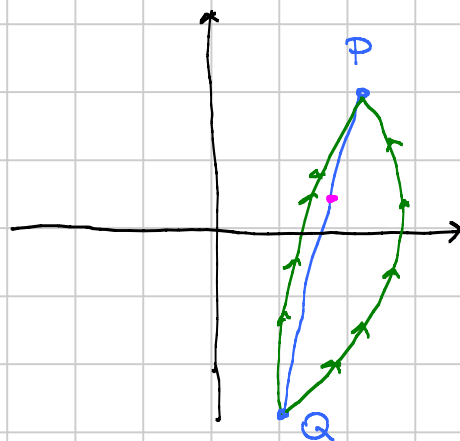
Idea: esiste un p.to P in cui $f(P) > \lambda$

" " " Q in cui $f(Q) < \lambda$

Nel segmento congiungente c'è almeno un p.to in cui vale esatt. λ

$$\varphi(t) = f(Q + t(P-Q))$$

φ è continua e $\varphi(0) < \lambda$ e $\varphi(1) > \lambda$



Lo stesso ragionamento vale per ogni percorso che congiunge P e Q .

Esempio 7 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \underbrace{\frac{\sin^2 x - \sin^2 y}{x-y}}_{f(x,y)} \quad D = \{ \dots : x \neq y \}$

In questo caso $f(x,y) \rightarrow 0$.

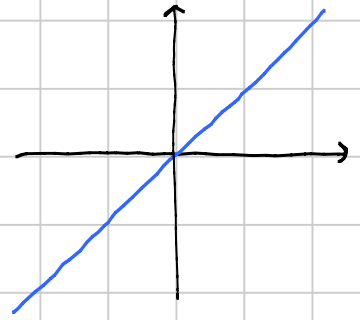
Uso Lagrange con $g(x) = \sin^2 x$

$$\sin^2 x - \sin^2 y = (x-y) g'(c) = (x-y) 2 \sin c \cdot \cos c$$

Per $x \neq y$ posso semplificare ottenendo $f(x,y) = 2 \sin c \cdot \cos c$

Quando $(x,y) \rightarrow (0,0)$ di sicuro $c \rightarrow 0$, quindi $f(x,y) \rightarrow 0$.

dipende da x e y , ma è compreso tra x e y



Esempio 8 $f(x,y) = \frac{\sin(xy)}{xy} \quad D = \text{fuori dagli assi}$

$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 1$ e si fa con il cambio di variabili $t = xy$

diventa $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1$.

— 0 — 0 —