

Visto finora: $\rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ $D \subseteq \mathbb{R}^n$

(Diagramma: una freccia blu indica $x \rightarrow x_0$ in $\mathbb{R}^n$, e un'altra freccia blu indica $f(x)$ verso il limite.)

$\rightarrow$ continuità per funzioni di più variabili

Quattro facce della continuità:

① con i limiti: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

② (ε/δ) : $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ t.c. $|f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon \quad \forall x \in B_\delta(x_0) \cap D$

③ per successioni: per ogni succ. $\underbrace{x_n \rightarrow x_0}_{\text{tutto in } \mathbb{R}^n}$ si ha $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$

④ con gli aperti: se $f(x_0) \in \text{Int}(B)$, allora $x_0 \in \underbrace{\text{Int } f^{-1}(B)}_{\text{relativo all'insieme } D.}$

— o — o —

LIMITI ALL'INFINITO PER FUNZIONI DI PIÙ VARIABILI

Data una succ. $\{x_n\} \subseteq \mathbb{R}^k$, cosa vuol dire che " $x_n \rightarrow +\infty$ "?

Vuol dire che $\underbrace{|x_n|}_{\text{norma}} \rightarrow +\infty$, cioè

$$\forall R > 0 \quad \exists m_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq m_0 \quad x_n \notin B_R(0)$$

origine

Def. Sia $D \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme non limitato ($\forall R > 0 \quad D \cap B_R(0) \neq \emptyset$)

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} f(x) = \begin{cases} \nearrow l \\ \rightarrow +\infty \\ \rightarrow -\infty \\ \searrow \text{N.E.} \end{cases}$$

(nessuno dei precedenti)

② $\forall M \in \mathbb{R} \exists R > 0$ t.c. $\forall x \in D \quad |x| \geq R \Rightarrow f(x) \geq M$

③ $\forall M \in \mathbb{R} \exists R > 0$ t.c. $\forall x \in D \quad |x| \geq R \Rightarrow f(x) \leq M$

① $\forall \varepsilon > 0 \exists R > 0$ t.c. $\forall x \in D \quad |x| \geq R \Rightarrow |f(x) - l| \leq \varepsilon$

Qs3. Ovviamente $\liminf$ e $\limsup$ esistono sempre

Esempio 1 $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ $\liminf / \limsup (x,y) \rightarrow (0,0)$

Asse x : $\lim_{t \rightarrow 0} f(t,0) = 0$ Bisettrice: $\lim_{t \rightarrow 0} f(t,t) = \frac{1}{2}$

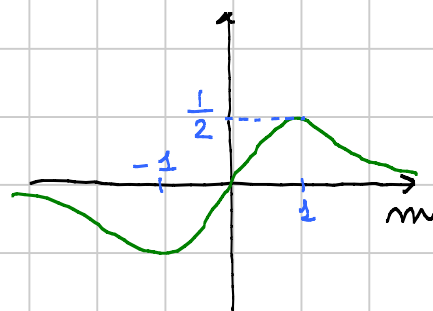
Chi sono $\liminf / \limsup$? Provo intanto la retta generica $y = mx$

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t, mt) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{m t^2}{t^2 + m^2 t^2} = \frac{m}{1+m^2}$$

Al variare di m troviamo vari valori del limite.

Da questo conto sappiamo che

$$\liminf f(x,y) \leq -\frac{1}{2} \quad \limsup f(x,y) \geq \frac{1}{2}$$



Provo a vedere se per caso $f(x,y) \stackrel{?}{\leq} \frac{1}{2}$; $\frac{xy}{x^2+y^2} \stackrel{?}{\leq} \frac{1}{2}$; $2xy \stackrel{?}{\leq} x^2+y^2$
 $\uparrow$
 $0 \leq x$

La disuguaglianza è vera, quindi $\limsup f(x,y) = \frac{1}{2}$. Idem per $\liminf$.

Esempio 2 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} = 0$

Si può fare con delle stime $\left| \frac{x^3}{x^2+y^2} \right| = |x| \frac{x^2}{x^2+y^2} \leq |x|$

Più velocemente si fa in COORDINATE POLARI $x = \rho \cos \theta$, $y = \rho \sin \theta$

$$f(x,y) = \frac{\rho^3 \cos^3 \theta + \rho^3 \sin^3 \theta}{\rho^2} = \rho (\cos^3 \theta + \sin^3 \theta)$$

Devo fare il limite per $\rho \rightarrow 0$, ma solo dopo essermi liberato di θ .

$$\underbrace{0}_{\downarrow 0} \leq \underbrace{|\rho (\cos^3 \theta + \sin^3 \theta)|}_{\downarrow 0} \leq \underbrace{2\rho}_{\downarrow 0}$$

Esempio 3 $f(x,y) = \frac{x^5 + 3y^5}{x^4 + y^4} \quad (x,y) \rightarrow (0,0)$

Passo in polari: $f(x,y) = \frac{\rho^5 (\cos^5 \theta + 3 \sin^5 \theta)}{\rho^4 (\cos^4 \theta + \sin^4 \theta)}$

$$= \rho \cdot \frac{\cos^5 \theta + 3 \sin^5 \theta}{\cos^4 \theta + \sin^4 \theta}$$

come posso stimarlo indipendentemente da θ ?

$|\text{Numeratore}| \leq 4$

Denominatore = $d(\theta)$ è una funzione continua che in $[0, 2\pi]$ avrà un minimo m per θ , che non è nullo perché $\cos \theta$ e $\sin \theta$ non si annullano contemporaneamente.

Quindi

$$0 \leq \rho \cdot \frac{4}{m} \leq \rho \cdot \frac{4}{m}$$

Esempio 4 $f(x,y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$

Passiamo in polari: $\frac{\rho^3 \cos^2 \theta \sin \theta}{\rho^4 \cos^4 \theta + \rho^2 \sin^2 \theta} = \rho \frac{\cos^2 \theta \sin \theta}{\rho^2 \cos^4 \theta + \sin^2 \theta}$

① Se fisso θ e faccio il limite in $\rho \rightarrow 0$ ottengo 0, almeno per $\sin \theta \neq 0$

② Quando $\sin \theta = 0$, la frazione vale 0, quindi tende comunque a 0

NO!!! Queste cose non si fanno!!!

Fissare θ è equivalente a fare il limite sulle rette!!!

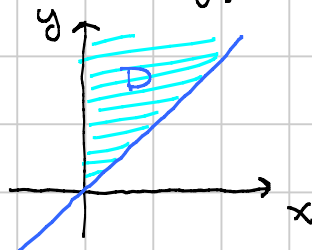
Achtung! Si può fare il limite in ρ solo dopo aver ottenuto stime UNIFORMI in θ . (v.B.: il limite non esisteva)

Esempio 5 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$

$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < y\}$

Ora esiste e fa 0. Infatti in D

$$0 \leq f(x,y) \leq \frac{x^2 y}{x^4 + x^2} = \frac{y}{1 + x^2} \leq y$$



In alternativa

$$0 \leq f(x,y) \leq \frac{y^3}{x^4+y^2} \leq \frac{y^3}{y^2} = y$$

Esempio 6 $f(x,y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} \quad |(x,y)| \rightarrow +\infty \quad x^2 + y^2 \rightarrow +\infty$

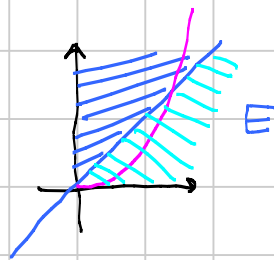
Asse x : $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t,0) = 0$

Bisettrice: $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t,t) = \frac{t^3}{t^4 + t^2} = 0$

Parabole: $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t,t^2) = \frac{1}{2}$ come sempre.

Se mi restringo al D dell'esempio 5

Continua a non esistere perché posso usare
bisettrice + parabole.



Esercizio Mostrare che il limite esiste se mi restringo ad E.
— 0 — 0 —