

Definizioni di limite per funzioni di più variabili

$A \subseteq \mathbb{R}^m$

$f: A \rightarrow \mathbb{R}$

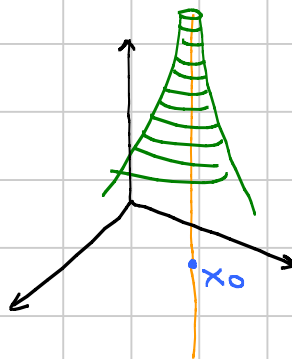
 $x_0 \in \mathbb{R}^m$ p.to di accumulazione di A

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ \text{vettori}}} f(x) = \begin{cases} l \in \mathbb{R} & \textcircled{1} \\ +\infty & \textcircled{2} \\ -\infty & \textcircled{3} \\ \text{n.e.} & \textcircled{4} \end{cases} \leftarrow \text{Nessuno dei precedenti}$$

$\textcircled{2} \forall M \in \mathbb{R} \text{ (anche enorme)}$

$\exists r > 0 \text{ t.c.}$

$f(x) \geq M \quad \forall x \in (B_r(x_0) \cap A) \setminus \{x_0\}$



$\textcircled{3} \forall M \in \mathbb{R} \exists r > 0 \text{ t.c. } f(x) \leq M \quad \forall x \in \dots$

$$\textcircled{1} \forall \varepsilon > 0 \exists r > 0 \text{ t.c. } l - \varepsilon \leq f(x) \leq l + \varepsilon \quad \forall x \in (B_r(x_0) \cap A) \setminus \{x_0\}$$

$$|f(x) - l| \leq \varepsilon$$

Achtung! In $\mathbb{R}^m$ non si fanno (almeno per ora :) limiti all'infinito.Osservazione $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ posso definire $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ \uparrow \mathbb{R}^m}} f(x) = l \in \mathbb{R}^m$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists r > 0 \text{ t.c. } |f(x) - l| \leq \varepsilon \quad \forall x \in (B_r(x_0) \cap A) \setminus \{x_0\}$$

$\uparrow$ vettori $\uparrow$ norma
 $\uparrow$

Notazione: se siamo in $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$ scriviamo

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x,y)$$

Esempio 1 Calcolare $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} \frac{y \log x + \arctan(xy)}{x^2 + y^2} = \frac{1}{5} \arctan 2$

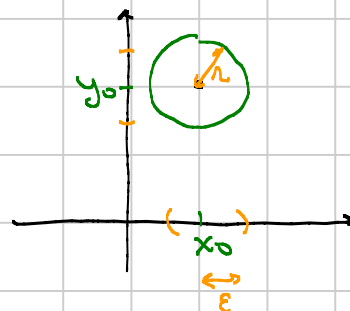
Posso sostituire perché vale il solito teorema di analisi 1.

L'unica cosa da dimostrare è la continuità delle "componenti"

$$f(x,y) = x$$

$$f(x,y) = y$$

Questa è sostanzialmente ovvia: se (x,y) è vicino a (x_0, y_0) , allora x è vicino a x_0 e y è vicino a y_0



Strumenti per il calcolo di limiti in $\mathbb{R}^n$:

→ teo. algebrici

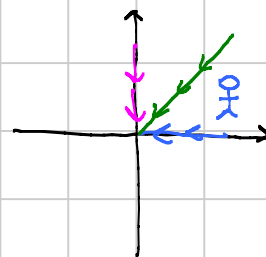
→ composizioni

→ confronto e carabinieri

→ De L'Hôpital NO

→ Taylor lo vedremo.

Esempio 1 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2} = f(x,y)$



Esploriamo con 3 cammini

1: $f(x,0) = 0$

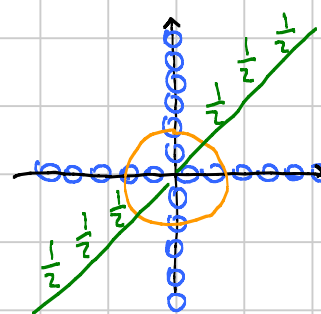
2: $f(0,y) = 0$

3: $f(x,x) = \frac{1}{2}$

Due cammini con comportamento diverso $\Rightarrow$ il limite non esiste

Se il limite fosse reale, non potrei avere valori che distano $\frac{1}{2}$ in ogni $B_r(0)$.

Similmente si escludono i limiti $\pm \infty$

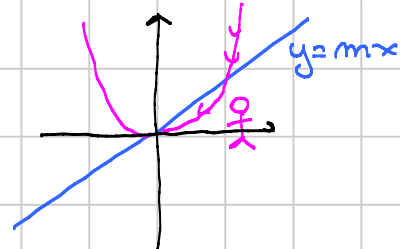


SLOGAN: ad Analisi 2 i limiti non hanno
NESSUNA VOGLIA di esistere

Come dimostro che un limite NON esiste? Trovo 2 cammini con comp. diverso

" " " " ESISTE? Può essere complicato

Esempio 2 $f(x,y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$ $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)}$?



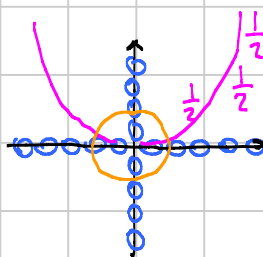
Asse x: $f(x,0) = 0$

Asse y: $f(0,y) = 0$

Bisettrice: $f(x,x) = \frac{x^3}{x^4 + x^2} = \frac{x}{x^2 + 1} \rightarrow 0$

$y = mx$: $f(x, mx) = \frac{m x^3}{x^4 + m^2 x^2} = \frac{mx}{x^2 + m^2} \rightarrow 0$ per ogni $m \neq 0$ e anche per $m = 0$

$f(x, x^2) = \frac{x^4}{x^4 + x^4} = \frac{1}{2}$

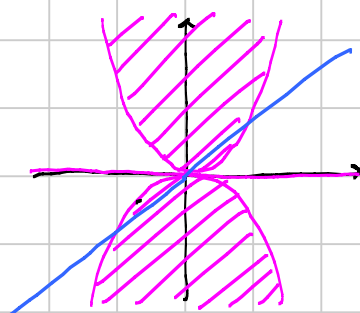


Esempio 3 $f(x,y) = \frac{xy^2}{x^4 + y^2}$

Dimostro che $|f(x,y)| \rightarrow 0$

$0 \leq |f(x,y)| = |x| \frac{y^2}{x^4 + y^2} \leq |x|$

Esempio 2-bis

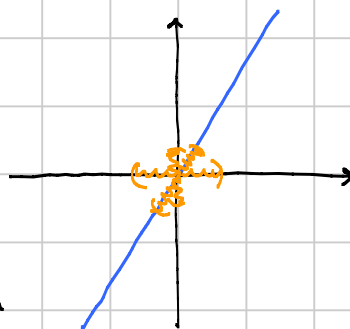


$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{zona colorata} \\ 1 & \text{fuori} \end{cases}$

Il limite a $(0,0)$ non esiste, ma su tutte le rette passanti per l'origine il limite viene 0 (ogni retta vicino all'origine casca in zona 0)

Fissato $\varepsilon > 0$ in ogni direzione trovo un intorno in cui $|f(x,y)| \leq \varepsilon$.

Se mettendo insieme gli intorno avessi una palla di $\mathbb{R}^2$ avrei l'esistenza del limite



Il problema è che ℓ^r sulle varie rette NON È UNIFORME, cioè non esiste un $r_0 > 0$ che va bene ovunque.

Esercizio (semi-hard) Trovare $f: \mathbb{R}^2 \setminus \{0,0\} \rightarrow \mathbb{R}$ tale che

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) \quad \text{NON ESISTE}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(\underbrace{ax^k, bx^k}_{\substack{\uparrow \\ \text{tutti omni che} \\ \text{passano in } (0,0)}}) = 0 \quad \text{per ogni } a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R} \\ k \geq 1, \quad \alpha \geq 1 \text{ interi}$$

ACHTUNG! Se anche infiniti omni concordano sul limite, questo può comunque non esistere.