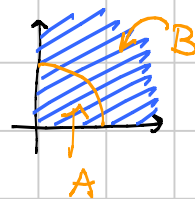


Esercizio 1 $\int_Q \frac{\arctan(xy)}{x^2+y^2}$

$Q = 1^o$ quadrante



Doppio problema: spezzo in A e B

In A converge (Brutalmente $\frac{\arctan(xy)}{x^2+y^2} \sim \frac{xy}{x^2+y^2} \sim \frac{\rho^2}{\rho^2} \sim 1$)

Rigorosamente: utilizzo la disuguaglianza $\arctan t \leq t$ per ogni $t \geq 0$, quindi

$$\int_A \frac{\arctan(xy)}{x^2+y^2} dx dy \leq \int_A \frac{xy}{x^2+y^2} dy = \int_0^R d\rho \int_0^{\pi/2} \frac{\rho^2 \cos\theta \sin\theta}{\rho^2} \rho d\theta$$

e converge.

In B potrei dire che $\frac{\arctan(xy)}{x^2+y^2} \leq \frac{\pi}{2} \frac{1}{x^2+y^2}$, quindi

$$\int_B \frac{1}{x^2+y^2} dx dy \leq \frac{\pi}{2} \int_B \frac{dx dy}{x^2+y^2} = +\infty \text{ e quindi BOH.}$$

Vorrei scrivere

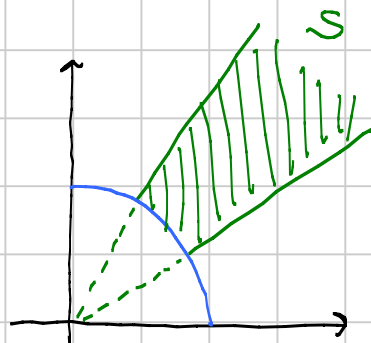
$\frac{1}{x^2+y^2} \geq \dots$ per poter dimostrare che diverge, ma se sono in B i ... possono solo essere 0 (perché xy si annulla sugli assi)

Rimedio: sostituire B con un settore S del tipo

$$\rho \geq R > 0 \quad \frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}$$

Allora

$$\int_B \frac{\arctan(xy)}{x^2+y^2} dx dy \geq \int_S \frac{\arctan(xy)}{x^2+y^2} dx dy =$$



$$= \int_R^{+\infty} \frac{1}{p} dp \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta \frac{\arctan(p^2 \cos \theta \sin \theta)}{p^2}$$

$$= \int_R^{+\infty} \frac{1}{p} dp \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \underbrace{\arctan(p^2 \cos \theta \sin \theta)}_{\geq \arctan(R^2 \cos \theta \sin \theta)} d\theta \geq \int_R^{+\infty} \frac{1}{p} dp \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \arctan(R^2 \cos \theta \sin \theta) d\theta$$

1ª possibilità: dire che $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta$ è un numero > 0 (int. di funz. pos.)

quindi $\int$ iniziale $\geq$ numero $\int_R^{+\infty} \frac{1}{p} dp$, quindi diverge

2ª possibilità Dire che $R^2 \cos \theta \sin \theta$ ha un minimo su positivo quando θ varia da $\frac{\pi}{6}$ a $\frac{\pi}{3}$. Il min. esiste per W e nell'intervallo dato $\cos \theta$ e $\sin \theta$ sono > 0 .
Occhio: in $[0, \frac{\pi}{2}]$ il minimo esiste, ma fa 0.

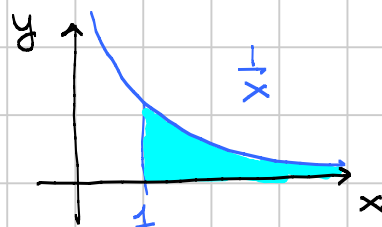
$$\text{A questo punto } \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \arctan(R^2 \sin \theta \cos \theta) d\theta \geq \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \arctan(R^2 m) d\theta > 0$$

Esercizio 2 $\int_A \frac{xy}{x^2+y^2} dx dy$

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 1, 0 \leq y \leq \frac{1}{x}\}$$

Puntiamo sulla convergenza

$$= \int_1^{+\infty} dx \int_0^{\frac{1}{x}} dy \frac{xy}{x^2+y^2} \leq \int_1^{+\infty} dx \int_0^{\frac{1}{x}} dy \frac{1}{x^2} =$$



Serve q.c. + grande, quindi $\frac{xy}{x^2+y^2} \leq \frac{x \cdot \frac{1}{x}}{x^2} = \frac{1}{x^2}$
 y in A vale al max $\frac{1}{x}$

$$= \int_1^{+\infty} dx \frac{1}{x^2} \int_0^{\frac{1}{x}} dy = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx, \text{ quindi converge.}$$

Esercizio 3

$$\int_A \frac{x^a y}{x^2 + y^2} dx dy$$

A come prima

Stesso conto di prima:

$$\int_1^{+\infty} dx \int_0^{\frac{1}{x}} dy \frac{x^a y}{x^2 + y^2} \leq \int_1^{+\infty} dx \int_0^{\frac{1}{x}} dy \frac{x^a \cdot \frac{1}{x}}{x^2} = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{3-a}} dx \int_0^{\frac{1}{x}} dy$$

$$= \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{4-a}} dx \quad \text{e questo converge se e solo se } 4-a > 1, \text{ cioè}$$

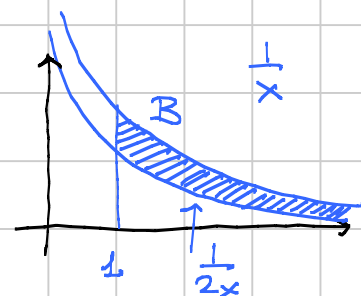
se e solo se $a < 3$

Siamo alle solite! Per $a < 3$ converge quello + grande, quindi converge quello iniziale; per $a \geq 3$ per ora boh.

Per $a \geq 3$ punto sulla divergenza, quindi voglio scrivere $\geq$, ma per farlo mi devo mettere su una sottozona B.

Ora

$$\int_A \frac{x^a y}{x^2 + y^2} dx dy \geq \int_B \frac{x^a y}{x^2 + y^2} dx dy$$



$$= \int_1^{+\infty} dx \int_{\frac{1}{2x}}^{\frac{1}{x}} \frac{x^a y}{x^2 + y^2} dy \geq \int_1^{+\infty} dx \int_{\frac{1}{2x}}^{\frac{1}{x}} \frac{1}{2} \frac{x^{a-1}}{x^2 + 1} dy = \frac{1}{2} \int_1^{+\infty} \frac{x^{a-1}}{x^2 + 1} \left[\int_{\frac{1}{2x}}^{\frac{1}{x}} dy \right]$$

$$\frac{x^a y}{x^2 + y^2} \geq \frac{x^a \cdot \frac{1}{2x}}{x^2 + 1}$$

ho usato che $y \geq \frac{1}{2x}$ in B

ho usato che $y \leq \frac{1}{x} \leq 1$

$$= \frac{1}{4} \int_1^{+\infty} \frac{x^{a-2}}{x^2 + 1} dx$$

e questo $\bar{e} = +\infty$ se $a \geq 3$

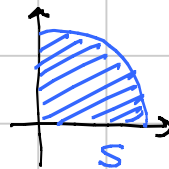
$$\frac{x^{a-2}}{x^2 + 1} \sim \frac{x^{a-2}}{x^2} = \frac{1}{x^{4-a}}$$

e $4-a \leq 1$ se $a \geq 3$

Per confronto anche quello iniziale fa too per $a \geq 3$.

Esempio 4

$$\int_S \frac{\log(1+y)}{x^2+2y^2} dx dy$$



Analisi 1: $\log(1+y) \sim y$ per $y \rightarrow 0$, quindi è come se fosse

$$\int_S \frac{y}{x^2+2y^2} dx dy \text{ e questo converge per i soliti motivi}$$

Rigoroso: volendo ci sarebbe la disuguaglianza $\log(1+y) \leq y \quad \forall y \geq 0$

Analisi 1: sappiamo che $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\log(1+y)}{y} = 1$, quindi per y vicini a 0

$$\text{si ha che } \frac{1}{2} \leq \frac{\log(1+y)}{y} \leq 2, \text{ quindi per } y > 0 \text{ e vicini a } 0$$

$$\frac{1}{2} y \leq \log(1+y) \leq 2y.$$

Così posso eliminare il log in un verso o nell'altro a seconda della convenienza.

Occhio: posso supporre y abbastanza piccolo perché posso sempre cambiare Q insieme con uno piccolo che contiene lo stesso p.to problematico.

Esempio 5

$$\int_Q \frac{\log(1+y)}{x^4+y^4+1}$$

$Q = 1^o$ quadrante (unico p.bm. è la zona di integrazione)

$$\text{Brutalmente: } \frac{\log(1+y)}{1+x^4+y^4} \sim \frac{\log p}{1+p^4} \text{ e } \int_{\mathbb{R}} \frac{\log p}{1+p^4} dp < +\infty$$

perché un $\log p$ non riesce ad intaccare un p^4 .