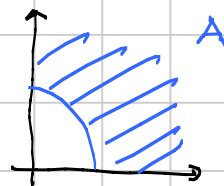


Integrali impropri con parametri

Esempio 1 $\int_A \frac{x^2 y^a}{x^6 + y^6} dx dy$



Domanda: studiare, al variare di a ,
la convergenza

Brutalmente: $\frac{x^2 y^a}{x^6 + y^6} \sim \frac{\rho^{2+a}}{\rho^6} = \frac{1}{\rho^{4-a}}$ con problema a $+\infty$
 converge $\Leftrightarrow 4-a > \boxed{2}$ dimensione
 $\Leftrightarrow a < 2$

Rigorosamente: coordinate polari

$$\begin{aligned} \int_A \dots &= \int_R^{+\infty} dp \int_0^{\pi/2} d\theta \frac{\rho^2 \cos^2 \theta \rho^a \sin^a \theta}{\rho^6 (\cos^6 \theta + \sin^6 \theta)} \cdot \rho \\ &= \int_R^{+\infty} \frac{dp}{\rho^{3-a}} \boxed{\int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2 \theta \sin^a \theta}{\cos^6 \theta + \sin^6 \theta} d\theta} = \underset{\neq 0}{\text{Numero}} \int_R^{+\infty} \frac{1}{\rho^{3-a}} dp \end{aligned}$$

Questo è un integrale proprio nella variabile θ (l'integranda è continua)

Quindi l'integrale dato si comporta come

$$\int_R^{+\infty} \frac{1}{\rho^{3-a}} dp, \text{ che converge } \Leftrightarrow 3-a > 1 \text{ cioè } \Leftrightarrow a < 2.$$

Esempio 2 $\int_A \frac{x^2 y^a}{x^4 + y^6} dx dy$ con lo stesso A di prima

Poneggio gli esponenti ponendo $x = w^3$ $y = z^2$

$$\begin{pmatrix} x_w & x_z \\ y_w & y_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3w^2 & 0 \\ 0 & 2z \end{pmatrix}$$

$$J = |\det| = 6w^2 z$$

Quindi

$$\int_A \frac{x^2 y^a}{x^4 + y^6} dx dy = \int_B \frac{w^6 z^{2a}}{w^{12} + z^{12}} \cdot 6 w^2 z dw dz$$


Rigorosamente: cambio in coordinate polari...

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 1, 0 \leq y \leq 1\}$$

Facciamo per allenamento il caso $a=2$

$\int_S \frac{x^2 y^2}{x^6 + y^6} dx dy$ (se fosse su  divergerebbe $\frac{p^4}{p^6} = \frac{1}{p^2}$)

Prova a fare delle stime: $\frac{x^2 y^2}{x^6 + y^6} \leq \frac{x^2}{x^6 + y^6} \leq \frac{x^2}{x^6} = \frac{1}{x^4}$

Allo stesso modo per y si ha: $\frac{x^2 y^2}{x^6 + y^6} \leq \frac{y^2}{x^6 + y^6} \leq \frac{y^2}{y^6} = \frac{1}{y^4}$

Allora

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \int_0^1 \frac{x^2 y^2}{x^6 + y^6} dx dy &= \int_1^{\infty} dx \int_0^1 dy \frac{x^2 y^2}{x^6 + y^6} \leq \int_1^{\infty} dx \int_0^1 dy \frac{1}{x^4} \\ &= \int_1^{\infty} \frac{1}{x^4} dx \underbrace{\int_0^1 dy}_{=1} = \int_1^{\infty} \frac{1}{x^4} dx \text{ converges} \end{aligned}$$

Ora il caso y^a si tratta esattamente allo stesso modo, quindi converge per ogni $a \geq 0$.

Esempio 3 $\int_S \frac{x^2 y^2}{x^6 + y^6} dx dy$ con S come prima. Con lo stesso discorso

$$\frac{x^a y^2}{x^6 + y^6} \leq \frac{x^a}{x^6} = \frac{1}{x^{6-a}} \quad \text{quindi}$$

$$\underbrace{\int_S \dots}_{I_1} \leq \underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{6-a}} dx}_{I_2}$$

e questo converge se e solo se $6-a > 1$
cioè se e solo se $a < 5$

NON ho finito, o meglio:

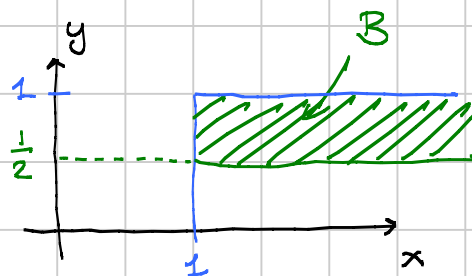
- se $a < 5$, allora $I_2 < +\infty$, quindi anche $I_1 < +\infty$
- se $a \geq 5$, allora $I_2 = +\infty$, quindi NON posso dire nulla di I_1 .

Resta da dimostrare che I_1 diverge per $a \geq 5$.

$$\frac{x^a y^2}{x^6 + y^6} \geq \frac{x^a \cdot \frac{1}{4}}{x^6 + 1}$$

$\swarrow$ num. + piccolo $\nwarrow$ denom. + grande

se integro solo
sul B



$$= \frac{1}{4} \frac{x^a}{x^6 + 1}$$

Finale: $\int_S \dots \geq \int_B \dots \geq \int_B \frac{1}{4} \frac{x^a}{x^6 + 1} dx = \int_1^{+\infty} dx \int_{\frac{1}{2}}^1 dy \frac{1}{4} \frac{x^a}{x^6 + 1}$

$\uparrow$ scelto $y \geq \frac{1}{2}$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \int_1^{+\infty} \frac{x^a}{1 + x^6} dx$$

e quest'ultimo (Analisi 1) converge se e solo se $a < 5$, quindi
per $a \geq 5$ diverge.

Esempio 4 $\int_A \frac{x^2 y^2 z^3}{(x^2 + y^2 + z^2)^a} dx dy dz$ $A = \text{sfera con centro in } (0,0,0) \text{ e raggio } 5$

Brutalmente: $\frac{\rho^7}{\rho^{2a}} = \frac{1}{\rho^{2a-7}}$ quindi converge $\Leftrightarrow 2a-7 < \textcircled{3}$
 $\Leftrightarrow 2a < 10 \Leftrightarrow a < 5$ $\uparrow$ dimensione

Rigorosamente: coordinate sferiche ...

Oss Quando converge, l'integrale fa 0 (dispari nella variabile z)

Esempio 5 $\int_A \frac{x^2 y^2 z^3}{x^2 + y^4 + z^a} dx dy dz$ $A = \text{solida sfera}$

$x = u^2$ $y = v$ $z = w^{\frac{4}{a}}$ Den no tutte potenze quante

Matrice: $\begin{pmatrix} 2u & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{a} w^{\frac{4}{a}-1} \end{pmatrix}$ $J = \frac{8}{a} u w^{\frac{4}{a}-1}$

Ci ritroviamo $\int_B \frac{u^4 v^2 w^{\frac{12}{a}}}{u^4 + v^4 + w^4} \cdot \frac{8}{a} u w^{\frac{4}{a}-1} du dv dw$

Brutalmente: sotto c'è p^4 e sopra c'è molto di più, quindi converge sempre

Questa volta l'integrandi è davvero limitata

$$\left| \frac{x^2 y^2 z^3}{x^2 + y^4 + z^a} \right| \leq \frac{\cancel{x^2} R^2 \cdot R^3}{\cancel{x^2}} = R^5$$

$\hookrightarrow \frac{x^2}{x^2 + y^4 + z^a} \leq 1$ $\frac{y^2 z^3}{x^2 + y^4 + z^a} \leq R^5$