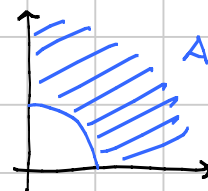


PAREGGIAMENTO DEGLI ESPONENTI

$$\int_A \frac{1}{x^2+y^4} dx dy$$

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, x^2+y^2 \geq 1\}$$

Idea: fare un cambio di variabili che renda uguali gli esponenti.



Poniamo $y^2 = z$ così la funzione diventa $\frac{1}{x^2+z^2}$.

Bisogna però trovare il J corrispondente.

Per vederlo meglio, cambiamo entrambe le variabili

$$z = y^2 \quad w = x$$

Determino J : $\rightarrow$ ricavo x e y in funzione di z e w ①

$\rightarrow$ calcolo la matrice jacobiana ②

$\rightarrow$ ne faccio il $|\det|$ ③

$$\textcircled{1} \quad x = w \quad y = \sqrt{z}$$

$$\textcircled{2} \quad \begin{pmatrix} x_w & y_w \\ x_z & y_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2\sqrt{z}} \end{pmatrix}$$

$$\textcircled{3} \quad J = |\det| = \frac{1}{2\sqrt{z}}$$

$$\begin{aligned} \text{Quindi riassumendo} \quad \int_A \frac{dx dy}{x^2+y^4} &= \int_B \frac{1}{w^2+z^2} \cdot J \, dz dw \\ &= \int_B \frac{1}{w^2+z^2} \frac{1}{2\sqrt{z}} \, dz dw \end{aligned}$$

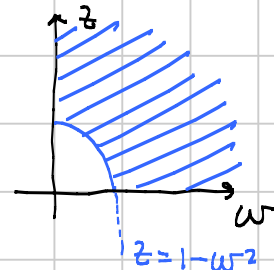
Chi è l'insieme B ?

$$x \geq 0 \quad y \geq 0 \quad x^2+y^2 \geq 1 \quad \leftarrow \text{descriz. di } A$$

$$w \geq 0 \quad \sqrt{z} \geq 0 \quad w^2+z \geq 1$$

$$z \geq 0$$

Quindi $B = \{(w, z) \in \mathbb{R}^2 : w \geq 0, z \geq 0, w^2 + z^2 \geq 1\}$



Studiamo l'integrale su B.

Intanto è equivalente ad integrare su un qualunque insieme del tipo



$$\begin{aligned} \int \frac{1}{w^2+z^2} \frac{1}{\sqrt{z}} dz dw &= \int_R^{+\infty} dp \int_0^{\pi/2} d\theta \frac{1}{p^2} \frac{1}{\sqrt{p \sin \theta}} \cdot p \\ &= \underbrace{\int_R^{+\infty} \frac{1}{p \sqrt{p}} dp}_{\text{improprio per colpa dell'insieme di integrazione}} \underbrace{\int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{\sin \theta}} d\theta}_{\text{improprio perché } \sin \theta \rightarrow 0 \text{ per } \theta \rightarrow 0} \end{aligned}$$

Ora $\int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{\sin \theta}} d\theta$ converge

Brutalmente $\sin \theta \sim \theta$ per $\theta \rightarrow 0$, quindi

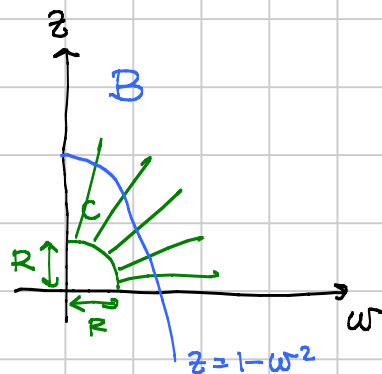
$\int \frac{1}{\sqrt{\sin \theta}}$ con p.m. a 0 si comporta come $\int \frac{1}{\sqrt{\theta}}$ con p.m. a 0 e questo converge

$$\int_R^{+\infty} \frac{1}{p \sqrt{p}} dp = \int_R^{+\infty} \frac{1}{p^{3/2}} dp \quad \text{e questo converge perché } \frac{3}{2} > 1$$

Resta da spiegare cos'è R.

$$\int_B \frac{1}{w^2+z^2} \frac{1}{\sqrt{z}} dw dz \leq \int_C \text{stessa roba}$$

Per di scegliere R piccolo, l'insieme C contiene l'insieme B.



Osservazione All'inizio era qualcosa del tipo
però con esponenti diversi al denomin.

Alla fine è diventato

$$\frac{1}{p^2 \cos^2 \theta + p^4 \sin^4 \theta}$$

$$\frac{1}{p^{5/2}} \frac{1}{\sqrt{\sin \theta}}$$

Metodo alternativo

$$\frac{1}{x^2+y^4}$$

Pongo $x = w^2$ $y = z$

In queste variabili diventa $\frac{1}{w^4+z^4}$. Calcolo J

① $x = w^2, y = z$

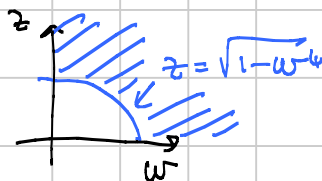
② $\begin{pmatrix} x_w & x_z \\ y_w & y_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2w & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

③ $|\det| = 2w$

Quindi $\int_A \frac{1}{x^2+y^4} dx dy = \int_B \frac{1}{w^4+z^4} 2w dw dz = 2 \int_B \frac{w}{w^4+z^4} dw dz$

$A = \dots x^2+y^2 \geq 1$

$B = \dots w^4+z^2 \geq 1$

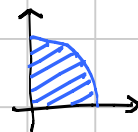


Questo converge sui soliti C come sopra perchè è del tipo $\frac{1}{\rho^3}$.

Esempio 2 $\int_A \frac{1}{x^2+y} dx dy$

$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, x^2+y^2 \leq 1\}$

Pareggio gli esponenti ponendo $x = w, y = z^2$



La funzione diventa $\frac{1}{w^2+z^2}$. Calcolo J

① $x = w, y = z^2$

② $\begin{pmatrix} x_w & x_z \\ y_w & y_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2z \end{pmatrix}$

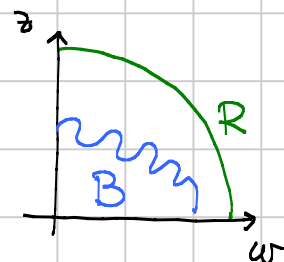
③ $J = 2z$

Quindi $\int_A \frac{1}{x^2+y} dx dy = \int_B \frac{1}{w^2+z^2} 2z dz dw = 2 \int_B \frac{z}{w^2+z^2} dz dw$

B è una specie di A

$A : \dots x^2+y^2 \leq 1$

$B : \dots w^2+z^4 \leq 1$



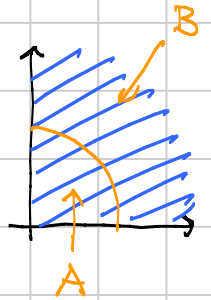
Prendo C = settore di raggio R che contiene B e ottengo

$\int_B \frac{z}{w^2+z^2} dz dw \leq \int_C \dots dz dw = \int_0^R \rho d\rho \int_0^{\pi/2} d\theta \frac{\rho \sin \theta}{\rho^2} \cdot \frac{J}{\rho} \leadsto \text{converge}$

Osservazione: L'ultimo conto fatto mostra che la funzione

$\frac{z}{z^2+w^2}$ NON è limitata su tutto $\mathbb{R}^2$, ma lo diventa quando moltiplico per p

Esempio 3 $\int_Q \frac{x^2 y^3}{x^4 + y^{10}} dx dy$ $Q = 1^o$ quadrante



Lo spezzo in 2 zone e faccio i cambi per
sistemi SOTTO,

$x = w^5$ $y = z^2$ ② $\begin{pmatrix} 5w^4 & 0 \\ 0 & 2z \end{pmatrix}$ ③ $J = 10w^4 z$

In queste nuove variabili $\int \frac{w^{10} z^6}{w^{20} + z^{20}} \cdot 10w^4 z dw dz$

$10 \int \frac{w^{14} z^7}{w^{20} + z^{20}} dw dz$ e questo

- sull'insieme B diverge perché $\sim \frac{p^{21}}{p^{20}}$
- sull'insieme A converge per lo stesso motivo,

Osservazione 1 All'inizio si poteva sospettare che l'integrale su B convergesse perché gli esponenti al denomin. sono grandi rispetto al numeratore.

Osservazione 2 Il conto fatto mostra che la funzione è limitata vicino all'origine (diciamo in A), anzi

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ (x,y) \in Q}} \frac{x^2 y^3}{x^4 + y^{10}} = 0$$

NO !!!

(Domanda: è giusto o è vero solo dopo aver moltiplicato per J ?)

↑ La seconda ☺