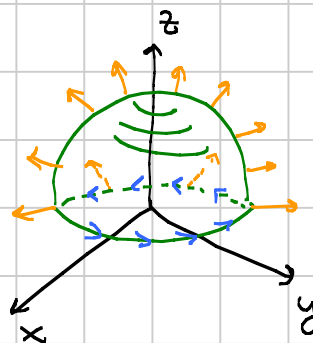


Come calcolo il flusso di un vettore attraverso una sup. orientata?

Esempio $S = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + 2z^2 = 4, z \geq 0 \}$
 $\vec{n}$ = normale "verso l'alto"
 $\vec{E} = (x, z-x, y^2-z)$

Calcolare $\int_S \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle d\sigma$



ROAD MAP 1

- ① Parametrizzo S
- ② Calcolo $\vec{n}$
- ③ Calcolo l'integrale (doppio)

① Parametrizz. cartesiana

$$\left\{ (u, v, \sqrt{2 - \frac{u^2 + v^2}{2}}) : \underbrace{u^2 + v^2 \leq 4}_{\text{insieme D dove variano i parametri } u, v} \right\}$$

↑
eq. della sup.

$$(x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

② Ci sono calcoli da fare con le radici ϕ_u & ϕ_v ③ pure

ROAD MAP 2 Stokes. ① Spero che $\vec{E} = \text{rot } \vec{F}$

② Calcolo $\vec{F}$

③ Calcolo la circuitazione di $\vec{F}$ lungo ∂S che si riduce a integrare $A dx + B dy + C dz$, dove $\vec{F} = (A, B, C)$

④ Come determino se $\vec{E}$ è rot. di qualcosa?

Fatto generale: se $\text{div } \vec{E} = 0$, allora esiste $\vec{F}$ tale che $\vec{E} = \text{rot } \vec{F}$

(il fatto gen. vale se l'insieme di def. è stellato)

$$\operatorname{div} \vec{E} = 1 + 0 - 1 = 0, \text{ quindi } \vec{E} \text{ è un rotore !!!}$$

② Come determino $\vec{F}$ tale che $\operatorname{rot} \vec{F} = (x, z-x, y^2-z)$.

Prima semplificazione: cerco $\vec{F}$ del tipo $(A, B, 0)$

$$\begin{pmatrix} i & j & k \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ A & B & 0 \end{pmatrix} \operatorname{rot} \vec{F} = (-B_z, A_z, B_x - A_y)$$

Quindi vorrei risolvere

$$B_z = -x$$

$$A_z = z - x$$

$$B_x - A_y = y^2 - z$$



$$B(x, y, z) = -xz + C_1(x, y)$$

$$A(x, y, z) = \frac{1}{2}z^2 - xz + C_2(x, y)$$

Ora cerco C_1 e C_2 in modo da soddisfare la 3ª condizione

$$B_x - A_y = -z + C_{1x} - C_{2y} = y^2 - z$$

Come seconda semplificazione, cerco C_2 che dipenda solo da x , così che l'equazione diventa

$$-z + C_{1x} = y^2 - z \leadsto C_{1x} = y^2 \leadsto C_1 = xy^2$$

Vediamo se funziona con $A(x, y, z) = \frac{1}{2}z^2 - xz$

$$B(x, y, z) = -xz + xy^2$$

$$C(x, y, z) = 0$$

$$B_z = -x \quad \text{ok}$$

$$A_z = z - x \quad \text{ok}$$

$$B_x - A_y = -z + y^2 - 0 \quad \text{ok}$$

Conclusione $\vec{E} = \operatorname{rot} \vec{F}$ con $\vec{F} = (\frac{1}{2}z^2 - xz, -xz + xy^2, 0)$

[Volevo poter piazzare 0 in 1ª o 2ª posizione]

$$\textcircled{3} \quad \int_S \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle d\sigma = \int_{\partial S} A dx + B dy + C dz$$

↑ descrive ∂S nel verso giusto

$$\gamma(t) = (2\cos\theta, 2\sin\theta, 0) \quad \text{con } \theta \in [0, 2\pi]$$

$$\int_{\partial S} A dx + B dy + C dz = \int_0^{2\pi} \underbrace{8\cos\theta \sin^2\theta}_{x y^2} \cdot \underbrace{2\cos\theta}_{\dot{y}} d\theta = \text{si fa facile.}$$

ROAD MAP 3 Cambio la superficie a parità di bordo !!

Idea: sappiamo che $\vec{E} = \text{rot } \vec{F}$ perché $\text{div } \vec{E} = 0$, ma non abbiamo voglia di calcolare $\vec{F}$. Per Stokes

$$\int_S \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle d\sigma = \int_S \langle \text{rot } \vec{F}, \vec{n} \rangle d\sigma = \int_{\partial S} \langle \vec{F}, \vec{c} \rangle ds$$

Se prendo una superficie $\hat{S}$ con lo stesso bordo, allora

$$\int_{\hat{S}} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle d\sigma = \int_{\hat{S}} \langle \text{rot } \vec{F}, \vec{n} \rangle d\sigma = \int_{\partial \hat{S}} \langle \vec{F}, \vec{c} \rangle ds$$

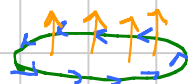
uguali perché
 $\partial S = \partial \hat{S}$

Quindi

$$\int_S \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle d\sigma = \int_{\hat{S}} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle d\sigma$$

Morale: invece di calcolare il flusso su S , lo calcolo su una $\hat{S}$ più semplice che abbia lo stesso bordo.

Nell'esempio posso usare come $\hat{S}$ il cerchio nel piano xy , con normale $(0, 0, 1)$



$$\text{Quindi} \quad \int_S \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle d\sigma = \int_{\text{cerchio}} \langle \vec{E}, (0, 0, 1) \rangle d\sigma$$

$$= \int_{x^2+y^2 \leq 4} (y^2 - \underbrace{z}_{=0}) dx dy$$

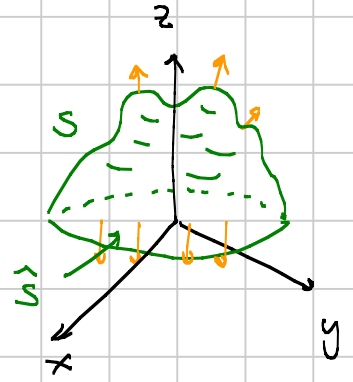
$$= \int_0^2 dp \int_0^{2\pi} d\theta \underbrace{p^2 \sin^2\theta}_{y^2} \cdot \underbrace{p}_{\dot{y}} = \pi \int_0^2 p^3 dp = 4\pi$$

ROAD MAP 4

Uso il teorema della divergenza (Gauss-Green)

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \vec{E} \, dx \, dy \, dz = \int_{\partial\Omega} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle \, d\sigma$$

Quando $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ e $\partial\Omega$ è il suo bordo orientato verso l'esterno.



Per avere un Ω "pieno" devo aggiungere la base, cioè il cerchio nel piano xy , che chiamo $\hat{S}$.

Otteniamo

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \operatorname{div} \vec{E} \, dx \, dy \, dz &= \int_{\partial\Omega} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle \, d\sigma = \\ &= \int_S \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle \, d\sigma + \int_{\hat{S}} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle \, d\sigma = \end{aligned}$$

normale che interessa a me *normale verso il basso, cioè $(0,0,-1)$*

Quindi

$$\int_S \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle \, d\sigma = - \int_{\hat{S}} \langle \vec{E}, (0,0,-1) \rangle \, d\sigma$$

si semplificano e viene lo stesso della ROAD MAP 3_

Oss. Questo funziona anche se $\operatorname{div} \vec{E} \neq 0$, solo che resta l'integrale triplo.

— o — o —

Ripasso Supponiamo che $\operatorname{div} \vec{E} = 0$. Allora $\vec{E} = \operatorname{rot} \vec{F}$.

Basta capire come sono fatte tutti i campi $\vec{F}$ tali che $\operatorname{rot} \vec{F} = (0,0,0)$. Questi sono tutti e soli i gradienti.

Quindi possiamo dire che

$$\vec{E} = \operatorname{rot} (\vec{F} + \nabla f)$$

funzione qualunque

— o — o —