

FORMULA DI STOKES = TEOREMA DEL ROTORE

- Ingredienti:
- una superficie S con il relativo bordo ∂S
 - una orientazione della superficie S e la corrispondente orientazione del bordo
 - un campo di vettori $\vec{E}$ in $\mathbb{R}^3$.

versore normale alla sup. (quello che determina l'orientazione)

$$\int_S \langle \operatorname{rot} \vec{E}, \vec{n} \rangle d\sigma = \int_{\partial S} \langle \vec{E}, \vec{\tau} \rangle ds$$

int. superf.

integrale curvilineo

versore tangente a ∂S (quello nella direzione che orienta "bene" ∂S)

L'integrale a sinistra è il flusso di $\operatorname{rot} \vec{E}$ uscente dalla superficie nel verso dato da $\vec{n}$.

L'integrale a destra è detto circuitazione di $\vec{E}$ lungo la curva che percorre ∂S nel verso giusto (vedi les. prec.).

Riassumendo: il flusso del rotore di $\vec{E}$ attraverso una sup. S è uguale alla circuitazione di $\vec{E}$ lungo il bordo di S .

Altro modo di scrivere la circuitazione. Sia $\vec{E} = (A, B, C)$ e sia

$\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ una parametrizzazione di ∂S , ovviamente nel verso giusto.

Il versore tangente $\vec{\tau}$ è dato da

$$\vec{\tau} = \frac{1}{\sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 + \dot{z}(t)^2}} (\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t))$$

Ora, se $t \in [a, b]$, la circuitazione diventa

$$\int_{\gamma} \langle \vec{E}, \vec{c} \rangle ds = \int_a^b (A \dot{x} + B \dot{y} + C \dot{z}) dt$$

Detto altrimenti, la radice al denom. di $\vec{c}$ si semplifica con quella di ds .
Quindi resta

$$\int_a^b [A(x(t), y(t), z(t)) \dot{x}(t) + B(x(t), y(t), z(t)) \dot{y}(t) + C(\dots) \dot{z}(t)] dt$$

In termini di forme differenziali, questo è

$$\int_{\gamma} [A dx + B dy + C dz]$$

per cui Stokes si può riscrivere come

$$\int_S \langle \text{rot } \vec{E}, \vec{n} \rangle d\sigma = \int_{\partial S} A dx + B dy + C dz$$

$$\vec{E} = (A, B, C).$$

↑
integrale di flusso

↑
integrale di una forma diff.

Esercizio Sia S la semisfera superiore

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 5, z \geq 0\}$$

orientata verso l'esterno, e sia $\vec{E} = (x+y, z, x^2)$.

Calcolare

$$\int_S \langle \text{rot } \vec{E}, \vec{n} \rangle d\sigma$$

1° modo: diretto

ROAD MAP

- ① Calcolo $\text{rot } \vec{E}$
- ② Parametrizzo S
- ③ Calcolo $\vec{n}$
- ④ Calcolo l'integrale

$$\textcircled{1} \begin{pmatrix} i & j & k \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ x+y & z & x^2 \end{pmatrix} \text{rot } \vec{E} = (-1, -2x, -1)$$

② Coordinate sferiche:

$$\{(\sqrt{5} \cos \theta \cos \varphi, \sqrt{5} \sin \theta \cos \varphi, \sqrt{5} \sin \varphi) : 0 \leq \theta \leq 2\pi, \underbrace{0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}}_{\text{semisfera}}\}$$

Modo alternativo: rappresentazione cartesiana

$$\{(u, v, \sqrt{5-u^2-v^2}) : u^2+v^2 \leq 5\}$$

③ Calcolo $\vec{\Phi}_\theta \wedge \vec{\Phi}_\varphi$ e vedo se viene coerente con $\vec{n}$ dato oppure opposto

$$\vec{\Phi}_\theta = (-\sqrt{5} \sin \theta \cos \varphi, \sqrt{5} \cos \theta \cos \varphi, 0)$$

$$\vec{\Phi}_\varphi = (-\sqrt{5} \cos \theta \sin \varphi, -\sqrt{5} \sin \theta \sin \varphi, \sqrt{5} \cos \varphi)$$

$\vec{\Phi}_\theta \wedge \vec{\Phi}_\varphi =$ formula mist. a partire dai 2 vettori precedenti

$$= (5 \cos \theta \cos^2 \varphi, 5 \sin \theta \cos^2 \varphi, 5 \sin^2 \theta \cos \varphi \sin \varphi + 5 \cos^2 \theta \sin \varphi \cos \varphi)$$

$$= (5 \cos \theta \cos^2 \varphi, 5 \sin \theta \cos^2 \varphi, 5 \cos \varphi \sin \varphi)$$

Proviamo nel polo nord ($\varphi = \frac{\pi}{2}$): viene $(0, 0, 5)$, quindi la normale è nel verso giusto, cioè esterna.

$$\textcircled{4} \int_S \langle \text{rot } \vec{E}, \vec{n} \rangle d\sigma = \int_S \underbrace{A}_{-1} (5 \cos \theta \cos^2 \varphi) + \underbrace{B}_{-2x} (5 \sin \theta \cos^2 \varphi) + \underbrace{C}_{-1} (5 \cos \varphi \sin \varphi)$$

$$= 5 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \left(-\cos \theta \cos^2 \varphi - \underbrace{2 \sqrt{5} \cos \theta \cos \varphi \sin \theta \cos^2 \varphi}_{-2x} - \cos \varphi \sin \varphi \right) d\theta d\varphi$$

= si fa.

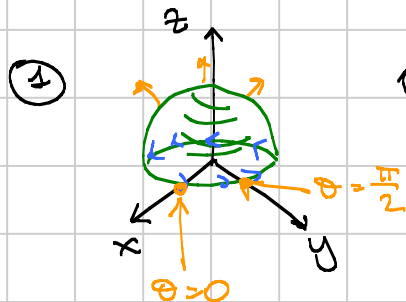
2° modo Con Stokes.

ROAD MAP

① Capisco il verso giusto su ∂S

② Parametrizzo ∂S

③ Integro la forma diff. $A dx + B dy + C dz$



② $(\sqrt{5} \cos \theta, \sqrt{5} \sin \theta, 0)$ $0 \leq \theta \leq 2\pi$
Questa gira nel verso giusto!

③ Integro la forma differenziale (Achtung! Ma A, B, C sono le componenti di $\vec{E}$)

$$\vec{E} = (x+y, z, x^2).$$

$$\int_{\gamma} (x+y) dx + z dy + x^2 dz =$$

$$= \int_0^{2\pi} [(x(t)+y(t)) \dot{x}(t) + z(t) \dot{y}(t) + x(t)^2 \dot{z}(t)] dt \quad [t=\theta]$$

$$= \int_0^{2\pi} (\sqrt{5} \cos \theta + \sqrt{5} \sin \theta) \sqrt{5} (-\sin \theta) d\theta = -5 \int_0^{2\pi} (\cos \theta \sin \theta + \sin^2 \theta) d\theta$$
$$= -5\pi$$

[Controllare che venga la stessa cosa anche con il 1° metodo].