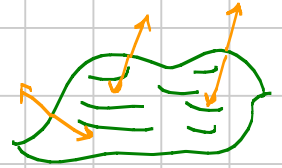


FORMULA DI STOKES

Orientare il bordo di una superficie

Orientare una superficie in $\mathbb{R}^3$: scegliere uno dei 2 possibili versori normali



Orientare il bordo di una superficie: scegliere uno dei due possibili versi di percorrenza del bordo stesso (qui stiamo assumendo che la sup. abbia un bordo)



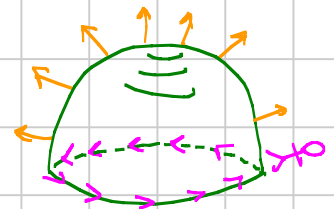
Orientazione canonica del bordo di una superficie

Sia S una superficie orientata (cioè in cui ho scelto un vettore normale p.to per punto).

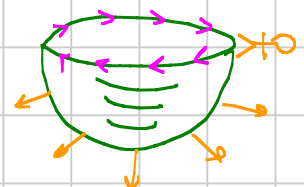
L'orientazione canonica del bordo è quella di un orologio che percorre il bordo tenendo la sup. a sinistra e rimanendo in piedi secondo il vettore normale che orienta la superficie.

Esempio 1 Semicфера orientata "verso l'esterno"

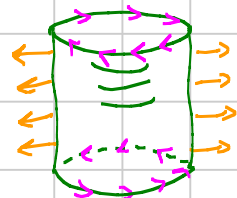
Se l'orientazione della semisfera fosse verso l'interno, l' $\vec{\tau}$ dovrebbe andare nel verso opposto per avere la sup. a sinistra.



Esempio 2 Se vuole la sup. a sx, deve girare come in figura.



Esempio 3 Sup. laterale del cilindro
orientata verso l'esterno.
L'orientazione risulta opposta nei 2 pezzi
del bordo.



Esempio 4 Semicfera

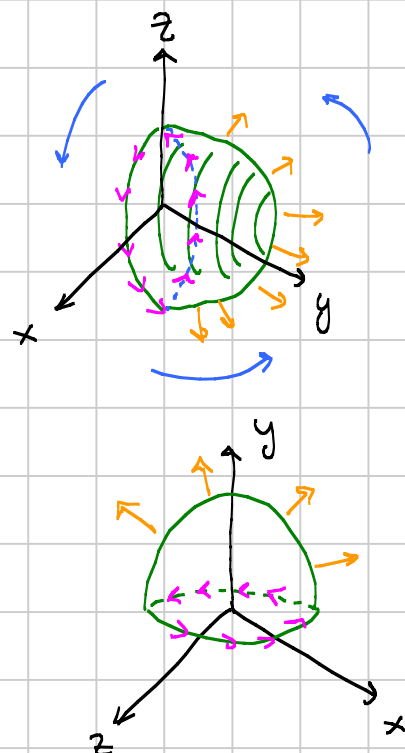
$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1, y \geq 0\}$$

orientata verso l'esterno.

Un modo per vederlo è di ruotare la figura
portandola in una posizione più "comoda".
Il metodo è comodo, ma occorre NON
INVERTIRE GLI ASSI !!!

Girando in senso orario / antiorario devo
trovare i 3 assi nello stesso modo.

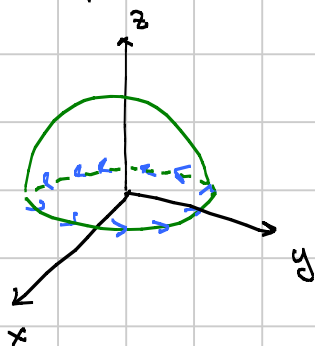
— o — o —



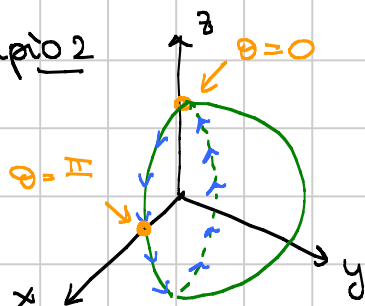
Passo successivo! scrivere l'espressione analitica di una curva che
percorra il bordo con il verso dato.

Esempio 1

La curva è $(\cos \theta, \sin \theta, 0)$ con $\theta \in [0, 2\pi]$
Questa va nel verso giusto.
(sto supponendo raggio = 1)



Esempio 2



La curva ha $y = 0$. le altre 2 coordinate
sono $\sin \theta$ e $\cos \theta$, ma in quale ordine?
 $(\sin \theta, 0, \cos \theta)$ $\theta \in [0, 2\pi]$
Controllare che succede invertendo !!

Orientazioni e parametrizzazioni

Consideriamo la param. di una superficie $\Phi : D \rightarrow \mathbb{R}^3$

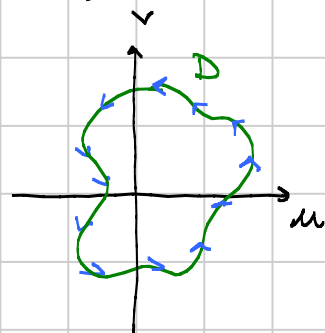
dove $D \subseteq \mathbb{R}^2$

$$\Phi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

Supponiamo che il vettore normale che orienta la superficie sia quello dato dalla formula videriosa, cioè $\Phi_u \wedge \Phi_v$.

Considero poi l'orientazione di ∂D che tiene D a sinistra.

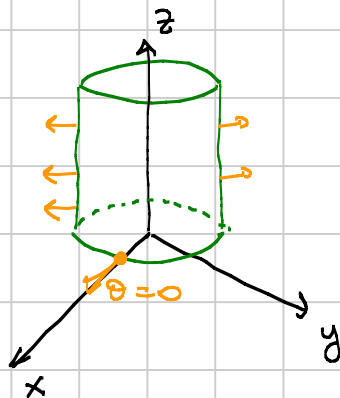
Allora, quando (u, v) percorrono il ∂D con questo verso, l'immagine $\Phi(u, v)$ percorre il bordo della sup. con il verso giusto.



Esempio Cilindro con raggio di base = 2 e altezza 3.

Come equazioni è

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 4, 0 \leq z \leq 3\}$$

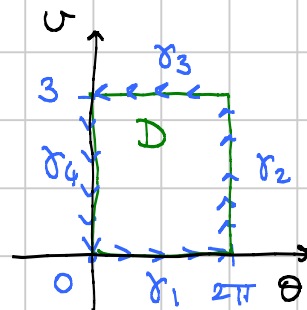


Come parametrizzazione potrebbe essere

$$\{(2 \cos \theta, 2 \sin \theta, v) : 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq v \leq 3\}$$

$$\Phi(\theta, v)$$

Insieme D dove variano i parametri



Questa parametrizzazione, quale orientazione induce sulla superficie?

Calcolo $\Phi_\theta = (-2 \sin \theta, 2 \cos \theta, 0)$ $\Phi_v = (0, 0, 1)$

$$\begin{pmatrix} i & j & k \\ -2 \sin \theta & 2 \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

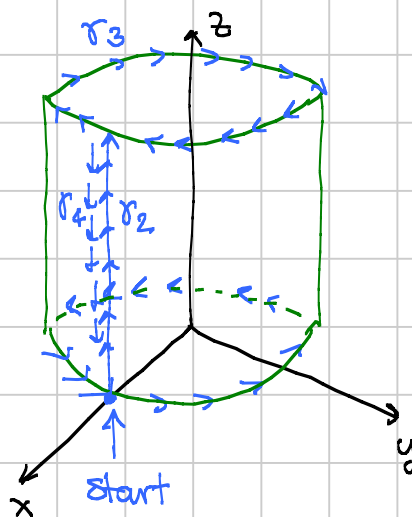
$$\Phi_\theta \wedge \Phi_v = (2 \cos \theta, 2 \sin \theta, 0)$$

Controllo in $\theta = 0$ e l'orientazione è uscente

Cosa succede quando percorro il ∂D nel verso che mi lascia D a sinistra?

Con σ_4 si torna alla partenza.

Nota bene: le 2 circonferenze delle basi sono orientate come si deve, i 2 pezzi verticali si cancellano.



Morale: l'orientazione del bordo di S è l'orientazione canonica di ∂D rilevata sulla superficie.