

Gauss - Green

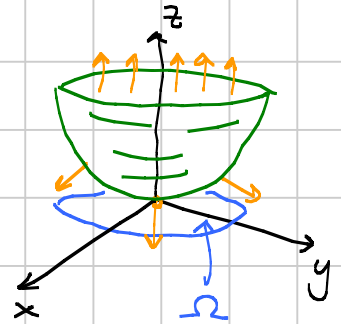
$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \vec{E} \, dx \, dy \, dz = \int_{\partial\Omega} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle \, d\sigma$$

Esempio 1 Sia S la superficie grafico di $z = x^2 + y^2$ con $x^2 + y^2 \leq 1$.

Calcolare il flusso di

$$\vec{E} = (x, 0, y+z)$$

prendendo come normale quella orientata verso il basso



ROAD MAP 2

→ Chiudo S aggiungendo il "coperchio"

①

→ Applico GG e ottengo il flusso su S U coperchio

②

→ Tolgo il flusso sul coperchio.

③

① Il coperchio è la superficie di parametrizzazione $(u, v, 1)$ con $\Omega = \{(u, v) : u^2 + v^2 \leq 1\}$

② Per GG abbiamo che, indicato con A l'interno della scodella,

$$\begin{aligned} \int_{\partial A} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle \, d\sigma &= \int_A \operatorname{div} \vec{E} \, dx \, dy \, dz = \int_A 2 \, dx \, dy \, dz \\ &= 2 \operatorname{Vol}(A) = 2 \int_{\Omega} dx \, dy \int_{x^2+y^2}^1 dz \\ &\quad \text{per} \uparrow \text{colonne} \\ &= 2 \int_{\Omega} dx \, dy (1 - x^2 - y^2) = 2 \int_0^1 \rho \, d\rho \int_0^{2\pi} d\theta (1 - \rho^2) \rho \\ &\quad \text{polari} \quad \text{J} \uparrow \\ &= 4\pi \int_0^1 (\rho - \rho^3) \, d\rho = 4\pi \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) = \pi \end{aligned}$$

③ D'altra parte

$$\pi = \int_{\partial A} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle d\sigma = \underbrace{\int_S \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle d\sigma}_{\substack{\text{quello richiesto} \\ \text{dall'esercizio: } \vec{n} \\ \text{è quella giusta}}} + \int_{\text{coperchio}} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle d\sigma$$

↑
vettore (0,0,1)
normale uscente
al coperchio

Di conseguenza Flusso richiesto = $\pi - \int_{\text{coperchio}} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle d\sigma$

$$= \pi - \int_{\text{coperchio}} (y+z) d\sigma = \pi - \pi = 0.$$

$$\int_{\text{Cop}} (y+z) d\sigma = \int_{\Omega} \underbrace{(r+1)}_{\substack{\uparrow y \\ \uparrow z}} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{M_1^2 + M_2^2 + M_3^2}}}_{\substack{\uparrow \\ \text{Area}(\Omega) = \pi}} du dv = \int_{\Omega} (r+1) du dv$$

— 0 — 0 —

Esempio 2

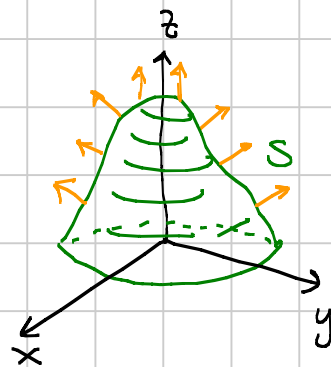
$$\vec{E} = (y+z, y, x^2-z)$$

S superficie di equazione $x^2 + y^2 + 3z^4 = 1$ con $z \geq 0$

$\vec{n}$ = vettore normale verso l'alto.

Calcolare

$$\int_S \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle d\sigma \quad (\text{cioè il flusso})$$



Se uso la definizione ho

ROAP MAP 1:

→ parametrizzo la sup. ①

→ calcolo M_1, M_2, M_3 ②

→ calcolo l'integrale $\int_{\Omega} (AM_1 + BM_2 + CM_3) du dv$ ③

① La sup. ha equazione $x^2 + y^2 + 3z^4 = 1$. Tenendo conto che $z \geq 0$ diventa

$$z = \sqrt[4]{\frac{1}{3}(1-x^2-y^2)} \quad \text{con } x^2 + y^2 \leq 1$$

Quindi la param. è con $\Omega = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2: u^2+v^2 \leq 1\}$

$$\Phi(u,v) = \left(u, v, \sqrt{\frac{1}{3}(1-u^2-v^2)}\right)$$

② Il calcolo di M_1, M_2, M_3 è inquietante 😞

ROAD MAP 2

→ Chiudo la superficie

①

→ Applico GG

②

→ Calcolo il flusso sul coperchio

③

① Basta aggiungere il cerchio di base: $(u,v,0)$ con $\boxed{u^2+v^2 \leq 1}$
 Ω

② Dato A l'interno per GG si ha che

$$\int_{\partial A} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle d\sigma = \int_A \operatorname{div} \vec{E} dx dy dz = 0 \text{ perché } \operatorname{div} \vec{E} = 0$$

③ Ora sappiamo che

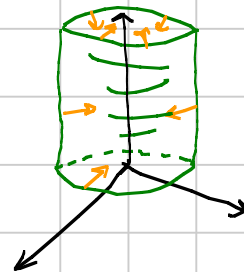
$$0 = \int_{\partial A} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle d\sigma = \underbrace{\int_S \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle d\sigma}_{\substack{\text{quello che ci serve} \\ \text{con il segno giusto}}} + \int_{\text{coperchio}} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle d\sigma$$

$\uparrow$
 $(0,0,-1)$ cioè
la normale
esterna al coperchio

Quindi

$$\begin{aligned} \int_S \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle d\sigma &= - \int_{\text{cop.}} \langle (y+z, y, x^2-z), (0,0,-1) \rangle d\sigma \\ &= \int_{\text{cop.}} (x^2-z) d\sigma = \int_{\Omega} u^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{3}(1-u^2-v^2)}} du dv \\ &= \int_{u^2+v^2 \leq 1} u^2 du dv = \int_0^1 dp \int_0^{2\pi} d\sigma p^2 \cos^2 \theta p \\ &= \int_0^1 p^3 dp \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta = \pi \int_0^1 p^3 dp = \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

Esempio 3 $\vec{E} = (x+y, y+z, x^2-y^2)$
 $S = \text{cilindro di eq. } x^2+y^2 = 4, 0 \leq z \leq 3$
 $\vec{n}$ = normale entrante



Voglio calcolare $\int_S \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle d\sigma$

ROAD MAP 1

- Parametrizzo S ①
- M_1, M_2, M_3 ②
- $\int_{\Omega} (AM_1 + BM_2 + CM_3) du dv$ ③

① Uso le coord. cilindriche

$$(2 \cos \theta, 2 \sin \theta, z)$$

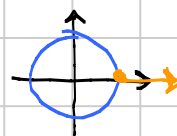
$\rho=2 = \text{raggio del cilindro}$

$$0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq z \leq 3$$

②

$$\begin{pmatrix} \phi_\theta \\ \phi_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \sin \theta & 2 \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(M_1, M_2, M_3) = (2 \cos \theta, 2 \sin \theta, 0)$$



Ma il verso che ci interessa? Basta provare in $\theta=0$ e viene $(2, 0, 0)$ che è uscente, quindi serve un segno $-$.

③

$$\begin{aligned} \int_S \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle d\sigma &= - \int_{\Omega} (AM_1 + BM_2 + CM_3) d\theta dz \\ &= - \int_{\Omega} [(x+y) 2 \cos \theta + (y+z) 2 \sin \theta] d\theta dz \\ &= - \int_{\Omega} (2 \cos \theta + 2 \sin \theta) 2 \cos \theta + (2 \sin \theta + z) 2 \sin \theta d\theta dz \\ &= - \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^3 dz \dots = \text{si fa.} \end{aligned}$$

ROAD MAP 2

→ Aggiungo i 2 tappi sopra e sotto

→ Applico GG

→ Calcolo il flusso sui 2 tappi

Detto C il cilindro

$$\int_C \operatorname{div} \vec{E} \, dx \, dy \, dz = \int_{\partial C} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle \, d\sigma$$

$$= - \int_S \text{che serve a noi} + \int_{\text{tappo alto}} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle \, d\sigma$$

$$+ \int_{\text{tappo basso}} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle \, d\sigma$$

$(0,0,1)$



$(0,0,-1)$

Esercizio: verificare che i 2 modi danno lo stesso risultato.