

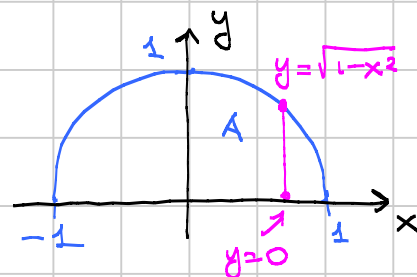
INTEGRALI DOPPI IN COORDINATE POLARI

$$\iint_A f(x,y) dx dy = \iint_B f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \boxed{\rho} d\rho d\theta$$

insieme A descritto
in coordinate polari

pagamento

Esempio 1 $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0\}$
 $f(x,y) = x^2$



1° modo: A è normale rispetto all'asse x

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2}\}$$

$$\iint_A x^2 dx dy = \int_{-1}^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy \quad \boxed{x^2} = \int_{-1}^1 x^2 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy$$

lung. colonna

$$= \int_{-1}^1 x^2 \sqrt{1-x^2} dx$$

e da qui è analisi 1, un po' seccante perché c'è la radice.

(Mi aspetto che venga positivo e uguale al doppio di quello in ~~1°~~)

2° modo: A ha una certa simmetria radiale, cioè si descrive bene in coordinate polari, diventando

$$0 \leq \rho \leq 1 \quad 0 \leq \theta \leq \pi$$

Nuovi estremi di integrazione
nelle variabili ρ e θ

$$\iint_A x^2 dx dy = \int_0^1 d\rho \int_0^\pi d\theta \quad \boxed{\rho^2 \cos^2 \theta} \quad \boxed{\rho}$$

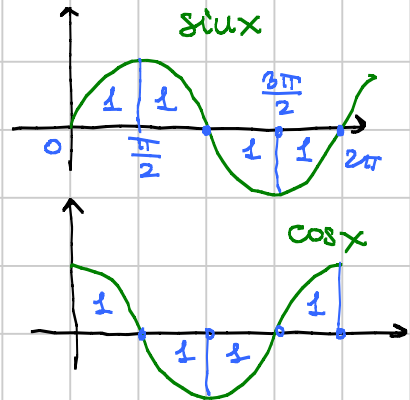
$\uparrow$ Nuovi estremi (A in coord. polari)
 $\uparrow$ x^2 in coordinate polari
 $\leftarrow$ pagamento da aggiungere

$$= \int_0^1 dp \int_0^\pi d\theta \, p^3 \cos^2 \theta = \int_0^1 p^3 dp \underbrace{\int_0^\pi \cos^2 \theta d\theta}_{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} \int_0^1 p^3 dp = \frac{\pi}{2} \left[\frac{1}{4} p^4 \right]_0^1 = \frac{\pi}{8}.$$

Fatti noti di Analisi 1

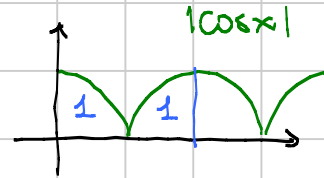
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx = 1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \sin x \, dx$$

$$\int_0^\pi \cos x \, dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \sin x \, dx = 0$$



Integrali di $\sin x$ o $\cos x$ con estremi che sono multipli interi di $\frac{\pi}{2}$ si calcolano "a occhio". Analogamente

$$\int_0^\pi |\cos x| \, dx = 2 \quad \text{--- 0 --- 0 ---}$$



$$\int_0^{\pi/2} \sin^2 x \, dx = S \quad \int_0^{\pi/2} \cos^2 x \, dx = C$$

Osservazione: i grafici di $\sin^2 x$ e $\cos^2 x$ in $[0, \frac{\pi}{2}]$ sono l'uno il simmetrico dell'altro, quindi $S = C$. D'altra parte

$$S + C = \int_0^{\pi/2} (\sin^2 x + \cos^2 x) \, dx = \int_0^{\pi/2} 1 \, dx = \frac{\pi}{2}$$

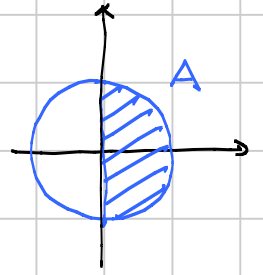
Quindi $S = C = \frac{\pi}{4}$ [Volevo si calcola anche con la primitiva]

Più in generale, la cosa vale anche in $[\frac{\pi}{2}, \pi]$, $[\pi, \frac{3\pi}{2}]$, e così via.

Conclusione da ricordare: l'integrale di $\sin^2 x$ o di $\cos^2 x$ in un intervallo i cui estremi sono multipli interi di $\frac{\pi}{2}$ è uguale a metà della lunghezza dell'intervallo.

Achtung! Vale solo per $\sin^2 x$ e $\cos^2 x$ (non altri esponenti) e solo se gli estremi sono multipli interi di $\frac{\pi}{2}$.

Esempio 2 $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x^2 + y^2 \leq 2, x \geq 0\}$



$$\iint_A x \, dx \, dy \quad [\text{Mi aspetto che venga } > 0]$$

A in coord. polari diventa $0 \leq \rho \leq \sqrt{2}$, $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$
↑ raggio ↓

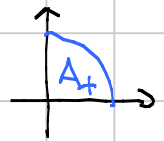
(andrebbe bene anche $\frac{3\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{5\pi}{2}$) evitare assurdità tipo $\frac{3\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$

$$\begin{aligned} &= \int_0^{\sqrt{2}} d\rho \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \underbrace{\rho \cos \theta}_x \underbrace{\rho}_{\text{pag.}} = \int_0^{\sqrt{2}} \rho^2 d\rho \underbrace{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta \, d\theta}_2 \\ &= 2 \int_0^{\sqrt{2}} \rho^2 d\rho = \frac{2}{3} [\rho^3]_0^{\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{3} \end{aligned}$$

Esempio 3 A come sopra

$$\iint_A y \, dx \, dy = 0 \quad [\text{per simmetria!}] \quad [\text{Fare il conto per esercizio}]$$

$$\begin{aligned} \iint_A |y| \, dx \, dy &= 2 \iint_{A_+} |y| \, dx \, dy = 2 \iint_{A_+} y \, dx \, dy \\ &= 2 \int_0^{\sqrt{2}} d\rho \int_0^{\pi/2} d\theta \underbrace{\rho \sin \theta}_y \underbrace{\rho}_{\text{pag}} \\ &= 2 \int_0^{\sqrt{2}} \rho^2 d\rho \underbrace{\int_0^{\pi/2} \sin \theta \, d\theta}_1 = 2 \int_0^{\sqrt{2}} \rho^2 d\rho = \frac{2}{3} 2\sqrt{2} = \frac{4\sqrt{2}}{3} \end{aligned}$$



Era prevedibile che fosse lo stesso dell'esempio precedente !! Cioè

$\iint_{A_+} y \, dx \, dy = \iint_{A_+} x \, dx \, dy$ ↗ E' la stessa figura ruotata di 90°
→ La simmetria $(x, y) \rightarrow (y, x)$ manda A_+ in se stesso e manda la funzione y nella funzione x

Esempio 4 $\iint_A x^2 dx dy$

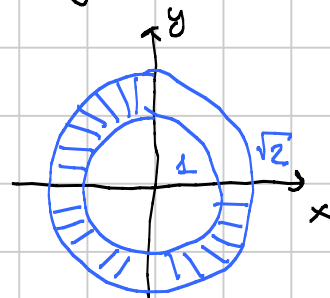
$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2\}$

$$= \int_1^{\sqrt{2}} dp \int_0^{2\pi} d\theta \, p^2 \cos^2 \theta \, p$$

$$= \int_1^{\sqrt{2}} p^3 dp \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta = \pi \int_1^{\sqrt{2}} p^3 dp$$

$$= \frac{\pi}{4} [p^4]_1^{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4} [4-1] = \frac{3\pi}{4}$$

— 0 — 0 —



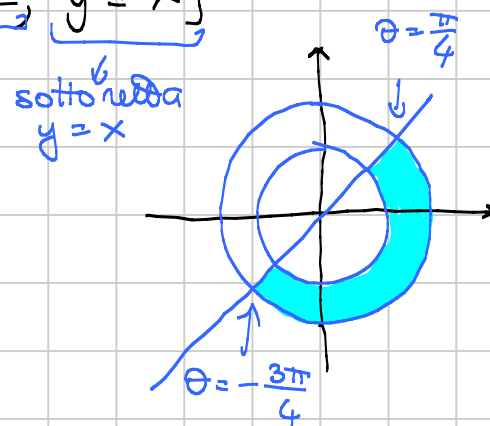
Esempio 5 $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \underbrace{1 \leq x^2 + y^2 \leq 2}_{\text{cerchio}} , \underbrace{y \leq x}_{\text{sotto la retta } y=x}\}$

Come insieme normale è
ovale !!!

$$\int_1^{\sqrt{2}} dp \int_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} d\theta \, p^2 \cos^2 \theta \, p$$

$$= \int_1^{\sqrt{2}} p^3 dp \int_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 \theta d\theta$$

Questo non si fa
con il trucco !!!
estremi non multipli di $\frac{\pi}{2}$!!!



$$\cos(2\theta) = 2\cos^2 \theta - 1 \Rightarrow \cos^2 \theta = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2\theta)$$

$$\Rightarrow \int \cos^2 \theta d\theta = \frac{1}{2} \theta + \frac{1}{4} \sin(2\theta)$$

e da qui si fa...

— 0 — 0 —