

INTEGRALI TRIPLI Integrali di funzioni $f(x, y, z)$.

- ① Come si indicano
- ② Significato geometrico / fisico
- ③ Definizione
- ④ Tecniche di calcolo

① **Notazioni** $\iiint_A f(x, y, z) dx dy dz$ anche $\int_A f(x, y, z) dx dy dz$

- $A \subseteq \mathbb{R}^3$ insieme limitato
- $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ funzione limitata

② **Interpretazione** Pensi $A \subseteq \mathbb{R}^3$ come un corpo solido.

Supponiamo $f(x, y, z) \geq 0$ che rappresenta la densità del materiale di cui è fatto A .

Allora $\iiint_A f(x, y, z) dx dy dz = \text{massa totale del corpo}$

③ **Definizione**

→ Caso banale: $A =$ parallelepipedo con spigoli (lati) $\parallel$ agli assi
 $f(x, y, z) = \lambda$ costante in A

$$\iiint_A f(x, y, z) dx dy dz = \lambda \cdot \text{Volume}(A)$$

$\uparrow$ "densità" $\uparrow$ Volume = massa totale

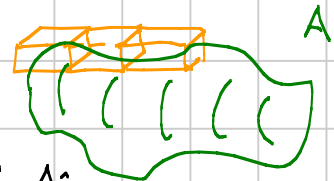
→ Caso semi-banale: $A =$ unione di parallelepipedi come sopra disgiunti

$f =$ costante, eventualmente diversa in ogni parallelepipedo
 (step function)

$$\iiint_A f(x,y,z) dx dy dz = \text{somma } \lambda_i \cdot \text{Vol}(A_i)$$

$\uparrow$ costante di f nell' i -esimo parall.
 $\uparrow$ i -esimo parall.

→ Caso generale : A ed f qualunque



Approssiamo A con una unione di parallelepipedi A_i e facciamo finita che su ogni A_i la f sia costante.

Formalmente

$$I^+(f, A) := \inf \left\{ \iiint_A \varphi(x,y,z) dx dy dz : \varphi \text{ è step function e } \varphi(x,y,z) \geq f(x,y,z) \text{ per ogni } (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

$$I^-(f, A) = \sup \left\{ \dots \varphi(x,y,z) \leq f(x,y,z) \dots \right\}$$

Def. Se $I^+(f, A) = I^-(f, A)$ (in generale vale solo $\geq$), allora si dice che f è integrabile secondo RIEMANN in A

— o — o —

④ Tecniche di calcolo Formule di riduzione:

$$3 = 1 + 1 + 1$$

$$3 = 2 + 1$$

$$3 = 1 + 2$$

Formula di riduzione su un parallelepipedo

$$\text{Supponiamo che } A = \underbrace{[a, b]}_x \times \underbrace{[c, d]}_y \times \underbrace{[e, f]}_z$$

$$\iiint_A f(x,y,z) dx dy dz = \int_a^b dx \int_c^d dy \int_e^f dz f(x,y,z)$$

Permutando x, y, z si ottengono 6 possibili formule di riduzione

Esempio $A = [0,1] \times [0,2] \times [-1,3]$ $f(x,y,z) = x + y^2 z^3$

$$\iiint_A (x + y^2 z^3) dx dy dz = \int_0^1 dx \int_0^2 dy \int_{-1}^3 dz (x + y^2 z^3)$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^2 dy \left[xz + \frac{1}{4} y^2 z^4 \right]_{z=-1}^{z=3}$$

primitiva risp. a z

$$= \int_0^1 dx \int_0^2 dy \left(\underbrace{3x + \frac{81}{4} y^2}_{z=3} + \underbrace{x - \frac{1}{4} y^2}_{z=-1} \right)$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^2 dy (4x + 20y^2) = 4 \int_0^1 dx \int_0^2 (x + 5y^2) dy$$

$$= 4 \int_0^1 dx \left[xy + \frac{5}{3} y^3 \right]_{y=0}^{y=2}$$

primitiva rispetto ad y.

$$= 4 \int_0^1 dx \left(2x + \frac{40}{3} \right) = 4 \left[x^2 + \frac{40}{3} x \right]_{x=0}^{x=1}$$

$$= 4 \left(1 + \frac{40}{3} \right) = \frac{4 \cdot 43}{3} = \frac{172}{3}$$

Si poteva procedere in altri modi, per esempio

$$\iiint_A (x + y^2 z^3) dx dy dz = \int_{-1}^3 dz \int_0^1 dx \int_0^2 dy (x + y^2 z^3)$$

[Controllare che venga uguale]

— 0 — 0 —

Osservazione generale L' integrale di $f(x,y,z) \equiv 1$

Analisi 1 $\int_a^b 1 dx = (b-a) =$ lunghezza dell' intervallo di integrazione

È l'area di un rettangolo con altezza 1 e base $(b-a)$, quindi il numero che rappresenta l'area è la lung. $(b-a)$ della base

Integrale doppio : se $A \subseteq \mathbb{R}^2$, allora

$$\iint_A 1 \, dx \, dy = \text{Area}(A)$$

(sarebbe il volume di un "prisma" con base A ed altezza 1, quindi $\text{Vol} = \text{Area}(\text{base})$)

Integrale triplo : se $A \subseteq \mathbb{R}^3$, allora

$$\iiint_A 1 \, dx \, dy \, dz = \text{Vol}(A)$$

(sarebbe la massa totale di un solido di densità 1)

Esempio di prima (revisited)

$$\iiint_A (x + y^2 z^3) \, dx \, dy \, dz = \iiint_A x \, dx \, dy \, dz + \iiint_A y^2 z^3 \, dx \, dy \, dz$$

Lo calcolo separatamente : $\iiint_A x \, dx \, dy \, dz = \int_0^1 dx \int_0^2 dy \int_{-1}^3 dz \, x$

$$= \int_0^1 x \, dx \underbrace{\int_0^2 dy \int_{-1}^3 dz \cdot 1}_{\text{integrale doppio di 1 sull'insieme}} = 8 \int_0^1 x \, dx = 4$$

integrale doppio di 1 sull'insieme

$$[0, 2] \times [-1, 3] \Rightarrow \text{Area insieme} = 2 \cdot 4 = 8$$

$$\iiint_A y^2 z^3 \, dx \, dy \, dz = \int_0^2 dy \int_{-1}^3 dz \int_0^1 dx \, y^2 z^3 = \int_0^2 y^2 dy \int_{-1}^3 z^3 dz \underbrace{\int_0^1 dx \cdot 1}_{\text{Doppio int} = 1}$$

$$= \int_0^2 y^2 dy \int_{-1}^3 z^3 dz = \int_0^2 y^2 dy \left[\frac{1}{4} z^4 \right]_{z=-1}^{z=3} = 20 \int_0^2 y^2 dy$$

$$= 20 \left[\frac{1}{3} y^3 \right]_{y=0}^{y=2} = \frac{160}{3}$$

Risultato finale : $4 + \frac{160}{3} = \frac{172}{3}$

— 0 — 0 —