

FORMULA DI TAYLOR IN PIÙ VARIABILI

Analisi 1 Con centro in $x_0 = 0$

Taylor-Peano: $f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n)$

Taylor-Lagrange: $f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}$

Con centro in x_0 qualunque è la stessa cosa

$$f(x_0 + R) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}R + \frac{f''(x_0)}{2!}R^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}R^n + \text{resto}$$

Peano / Lagrange

Analisi 2 $f(x, y) = f(0, 0) +$

$$+ \frac{1}{1!} [f_x(0, 0)x + f_y(0, 0)y]$$

$$+ \frac{1}{2!} [f_{xx}(0, 0)x^2 + 2f_{xy}(0, 0)xy + f_{yy}(0, 0)y^2]$$

$$+ \frac{1}{3!} [f_{xxx}(0, 0)x^3 + 3f_{xxy}(0, 0)x^2y + 3f_{xyy}(0, 0)xy^2 + f_{yyy}(0, 0)y^3]$$

e così via...

... il termine che ad analisi 1 era $o(x^n)$ ora diventa

$$o(\| (x, y) \|^n), \text{ cioè } \underbrace{o((\sqrt{x^2 + y^2})^n)}_{\text{in polari sarebbe } o(\rho^n)}$$

Osservazione Come ad Analisi 1, il calcolo di uno sviluppo di Taylor si semplifica notevolmente usando gli sviluppi elementari.

Esempio 1 $f(x, y) = \sin(x+y)$ sviluppo con $m=4$

Poderíamos de $\sin t = t - \frac{1}{6}t^3 + o(t^4)$, da cui

$$\begin{aligned} \sin(x+y) &= (x+y) - \frac{1}{6}(x+y)^3 + o(\boxed{(x+y)^4}) \\ &= x+y - \frac{1}{6}(x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3) + o(\boxed{x^2y^2}^2) \end{aligned}$$

Esempio 2 $f(x, y) = \cos x \cdot \sin(xy)$ sviluppo con $n = 5$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + O(x^5) \quad \sin t = \text{come sopra}$$

$$\text{su } xy = xy - \frac{1}{6}x^3y^3 + o(x^4y^4) = xy + o((x^2+y^2)^{5/2})$$
 è di grado 6, quindi viene mangiato da $\nearrow$

Quindi $f(x,y) = \left(1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^5)\right)(xy + o(\cdot))$

$$= xy - \frac{1}{2}x^3y + o((x^2+y^2)^{5/2})$$

Dallo sviluppo di Taylor vedo che

- $f(0,0) = 0$ (non c'è "termine noto" nello sviluppo)
- $\nabla f(0,0) = (0,0)$ (non ci sono i termini di grado 1)
- i termini di grado 2 sono $\frac{1}{2}$ (forma quadratica associata alla matrice Hessiana),

quindi la forma quadratica è $q(x,y) = 2xy$, $Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$,
quindi autovalori ± 1 , quindi p.to di sella.

Esempio 3 $f(x,y) = \arctan x \cdot e^{x^2 y} \cdot \cos y$ $n=5$

$$\arcsin x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + O(x^7), \quad \cos y = 1 - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{24}y^4 + O(y^6)$$

$$e^t = 1 + t + \frac{1}{2} t^2 + \frac{1}{6} t^3 + \dots$$

$e^{x^2y} = 1 + x^2y + \text{il termine successivo sarebbe } (x^2y)^2 \text{ quindi sarebbe mangiato da } o(p^5)$

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \left(x - \frac{1}{3} x^3 + \frac{1}{5} x^5\right) \left(1 + x^2y\right) \left(1 - \frac{1}{2} y^2 + \frac{1}{24} y^4\right) + o((x^2+y^2)^{5/2}) \\ &= \left(x + x^3y - \frac{1}{3} x^3 + \frac{1}{5} x^5\right) \left(1 - \frac{1}{2} y^2 + \frac{1}{24} y^4\right) + o(()^{5/2}) \\ &= x + \boxed{x^3y} - \frac{1}{3} x^3 + \frac{1}{5} x^5 - \frac{1}{2} x y^2 + \frac{1}{6} x^3 y^2 + \frac{1}{24} x y^4 + o(()^{5/2}) \end{aligned}$$

Domanda: 1 - quanto vale $\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}(0,0)$? Vale 0: infatti in

Taylor compare come coeff. di x^4 che non c'è, quindi il coeff. è 0.

2 - quanto vale $\frac{\partial^4 f}{\partial x^3 \partial y}(0,0)$? Vale 6!

I termini di grado 4 nello sviluppo di Taylor sono

$$\frac{1}{4!} [f_{xxxx}(0,0) x^4 + 4 f_{xxx y}(0,0) x^3 y + \dots]$$

(i coefficienti 1, 4, ... sono i binomiali, cioè da quanta riga di Pascal)

quindi $\frac{4}{4!} f_{xxx y}(0,0) x^3 y = \frac{1}{6} f_{xxx y}(0,0) x^3 y$

Visto che nel polinomio $\underline{x^3 y}$ compare con coeff. 1, da $f_{xxx y}$ vale 6.

Achtung! Con Taylor posso calcolare le derivate solo nel centro in cui sviluppo.

Tornando all'esempio, in (0,0) abbiamo

$f_x(0,0) = 1$ e $f_y(0,0) = 0$ (sono i coeff. di x e y), quindi l'origine non è un pto stazionario

— 0 — 0 —

Esempi di studio vicino a (0,0)

Esempio 4 $f(x,y) = x^2 + y^4$ $(0,0)$ è stazionario

$$f_x = 2x \quad f_y = 4y^3$$

$$\nabla f = (2x, 4y^3)$$

$$f_{xx} = 2, \quad f_{xy} = 0, \quad f_{yy} = 12y^2$$

$$Hf = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 12y^2 \end{pmatrix}$$

$$\nabla f(0,0) = (0,0) \Rightarrow \text{stazionario}$$

$$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ semidef. pos.}$$

Da Hf posso dedurre che $(0,0)$ NON è un p.to di max. locale (se lo fosse dovrebbe essere $Hf \leq 0$).

In questo caso si vede a occhio che $(0,0)$ è un p.to di MIN. GLOB. (quindi anche locale) per $f(x,y)$.

Infatti $f(0,0) = 0$ e $f(x,y) > 0$ per ogni $(x,y) \neq (0,0)$

Esempio 5 $f(x,y) = x^2 - y^4$... facendo i conti trovo

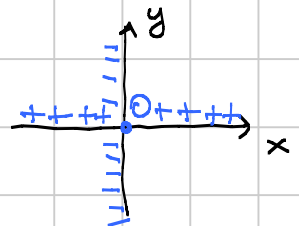
$$\nabla f(x,y) = (2x, -4y^3)$$

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -12y^2 \end{pmatrix}$$

In $(0,0)$ ho $\nabla f = (0,0) \Rightarrow$ stazionario e $Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$ semidef. pos.
 $\Rightarrow$ di sicuro non max. locale. In questo caso non è max e non è min.

Vicino a $(0,0)$ ho p.ti in cui $f(x,y) > 0$

e p.ti in cui $f(x,y) < 0$.



Esempio 3 $f(x,y) = x^3 + x^2y^2 + y^4$

Si vede subito che $\nabla f(0,0) = (0,0)$ e $Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$ BOH ASSOLUTO
(è un polinomio senza termini di grado 1 e 2)

Non è né max, né min

