

ANALISI 2 — LEZIONE 17

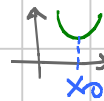
Titolo nota

20/03/2014

Derivate successive per funzioni di più variabili

Analisi 1 • Derivata n-esima

- Studio locale di funzioni: se $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) > 0$, allora x_0 è un p.to di minimo locale
- Taylor



Derivate successive: Derivate prime $\leadsto$ Derivate parziali prime

Esempio $f(x, y) = x^2 + y^3 + x^4 y^5$

$$f_x = 2x + 4x^3 y^5$$

$$f_y = 3y^2 + 5x^4 y^4$$

Derivate seconde: ho 4 possibilità

$$f_{xx} = \text{derivo } f_x \text{ rispetto ad } x = 2 + 12x^2 y^5$$

$$f_{xy} = \text{derivo } f_x \text{ rispetto ad } y = 20x^3 y^4$$

$$f_{yx} = \text{derivo } f_y \text{ rispetto ad } x = 20x^3 y^4$$

$$f_{yy} = \text{derivo } f_y \text{ rispetto ad } y = 6y + 20x^4 y^3$$

In generale, per una funzione di n variabili ho n derivate parziali prime, e n^2 derivate parziali seconde.

Le derivate successive si calcolano allo stesso modo:

$$f_{xxx} = 24x y^5$$

$$f_{xyy} = 80x^3 y^3 \quad \text{e così via}$$

Altra notazione: $f_x(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$

$$f_y(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$$

$$f_{xx}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y)$$

↑
derivata parziale di f
fatta 2 volte rispetto ad x

$$f_{xy}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y)$$

$$f_{xxy}(x, y) = \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(x, y)$$

Teorema (di inversione dell'ordine di derivazione)

Se f_{xy} e f_{yx} esistono in un intorno del p.to (x_0, y_0) e sono continue nel p.to (x_0, y_0) , allora coincidono, cioè

$$f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0)$$

Conseguenza Nel calcolare le derivate parziali successive, non conta l'ordine in cui derivo rispetto alle varie variabili, ma solo quante volte derivo rispetto ad ogni variabile.

Esempio 1 $f(x, y)$

Due derivate prime:

$$f_x \quad f_y$$

Tre derivate seconde:

$$f_{xx} \quad f_{xy} = f_{yx} \quad f_{yy}$$

Quattro derivate terze:

$$\begin{array}{cccc} f_{xxx} & f_{xxy} & f_{xyy} & f_{yyy} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} x+y \\ x^2+2xy+y^2 \\ x^3+3x^2y+3xy^2+y^3 \end{array} \right.$$

2015 derivate (parziali) 2014-esime: quello che conta è quante volte derivo rispetto ad x , e può essere $\underbrace{0, 1, 2, \dots, 2014}_{2015 \text{ possibilità}}$

Esempio 2 $f(x, y, z)$

Derivate prime:

$$f_x \quad f_y \quad f_z \quad (x+y+z)$$

Derivate seconde:

$$\begin{array}{ccccc} f_{xx} & f_{yy} & f_{zz} & f_{xy} & f_{yz} & f_{xz} \end{array}$$
$$x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2xz = (x+y+z)^2$$

Derivate terze:

$$\begin{array}{ccccc} f_{xxx} & f_{yyy} & f_{zzz} & & \\ f_{xxy} & f_{xyy} & f_{yzz} & f_{yyz} & f_{xzz} & f_{zxx} \\ f_{xyz} & & & & \end{array}$$

$$(x+y+z)^3 = x^3+y^3+z^3+3(x^2y+xy^2+y^2z+yz^2+x^2z+xz^2)+6xyz$$

Derivate prime $\rightarrow$ gradiente $\rightarrow \nabla f = (f_x, f_y)$

Derivate seconde $\rightarrow$ MATRICE HESSIANA $\rightarrow Hf = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}$

La matrice Hessiana nel caso di $f(x,y,z)$ diventa

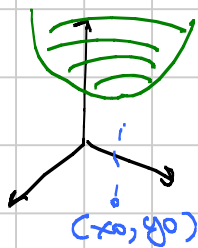
$$Hf = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{pmatrix}$$

Brutalmente: tutte le condizioni che ad analisi 1 coinvolgono il segno della derivata seconda, ad analisi 2 coinvolgono la segnatura della matrice Hessiana

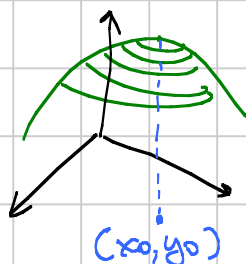
Studio locale nell'intorno di un p.to stazionario

Sia $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ (ma vale uguale da $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$) e sia $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ tale che $\nabla f(x_0, y_0) = 0$ (cioè (x_0, y_0) è un p.to stazionario)

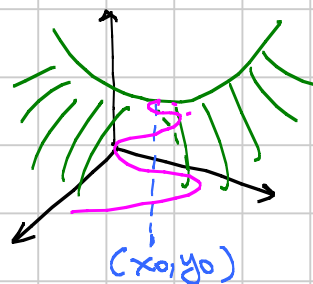
- se Hf è def. pos. $(++)$, allora (x_0, y_0) è un p.to di min. locale
- se Hf è def. neg. $(--)$, " " " " max. locale
- se Hf è indefinito $(+-)$, allora (x_0, y_0) è un p.to di sella, quindi né un max, né un min. locale
- se Hf è degenere (cioè $\det Hf = 0$), allora BOH (nel senso che può succedere qualunque cosa e non si può dedurre nulla).



MIN. LOCALE



MAX. LOCALE



P.TO DI SELLA O
MOUNTAIN PASS

Achtung!

Non ha senso usare la matrice Hessiana per risolvere un problema di max/min globale.

Infatti l'Hessiana fornisce una informazione LOCALE, cioè vicino al p.to, ma nessuna informazione GLOBALE.

Analisi 1

Se x_0 è un p.to di min. locale, allora

$$f'(x_0) = 0 \quad \text{e} \quad f''(x_0) \geq 0 \quad (\text{posto che esistano})$$

e analogo per il max

Analisi 2

Se (x_0, y_0) è un p.to di min. locale, allora

$$\nabla f(x_0, y_0) = 0 \quad \text{e} \quad Hf(x_0, y_0) \geq 0$$

↑
vettore

↑
matrice semi-definita pos.

Quindi :

$$\nabla f = 0 + Hf > 0 \Rightarrow \text{min. locale}$$

min. locale

$$\Rightarrow \nabla f = 0 + Hf \geq 0$$

Ad esempio, se la matrice Hessiana ha autovalori 0,5 posso solo dire che non è un p.to di max (se lo fosse dovrebbe essere $Hf \leq 0$), ma potrebbe essere un p.to di min, oppure altre cose.