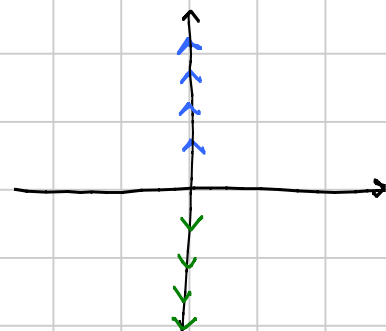


Esempio 1 $\lim_{x^2+y^2 \rightarrow +\infty} (x^2 + x^4 + y^3 + x^6 y^2) = \text{N.E.}$

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} f(0, y) = \lim_{y \rightarrow +\infty} y^3 = +\infty$$

$$\lim_{y \rightarrow -\infty} f(0, y) = \lim_{y \rightarrow -\infty} y^3 = -\infty$$

Gratz: $\sup \{ f(x, y) : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \} = +\infty$
 $\inf \quad \quad \quad = -\infty$



Esempio 2 $\lim_{x^2+y^2 \rightarrow +\infty} (x^2 + 2y^2 - 3xy)$

Con $(0, y)$ o con $(x, 0)$ ottengo limite $+\infty$

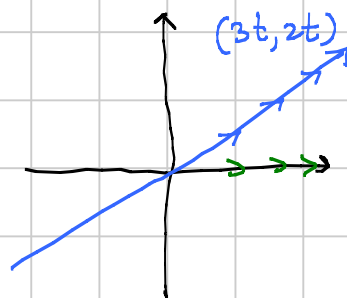
La matrice sarebbe $\begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & 2 \end{pmatrix}$ Det: $2 - \frac{9}{4} < 0$

Completo i quadrati e ottengo

$$\begin{aligned} x^2 + 2y^2 - 3xy &= x^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{3}{2}y + \frac{9}{4}y^2 - \frac{9}{4}y^2 + 2y^2 \\ &= \left(x - \frac{3}{2}y\right)^2 - \frac{1}{4}y^2 \end{aligned}$$

Idea: andare all'infinito nella direzione $x - \frac{3}{2}y = 0$ $2x - 3y = 0$

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +\infty} f(3t, 2t) &= \lim_{t \rightarrow +\infty} 9t^2 + 8t^2 - 18t^2 \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} -t^2 = -\infty \end{aligned}$$



$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t, 0) = \lim_{t \rightarrow +\infty} t^2 = +\infty$. Quindi globalmente non esiste.

Esempio 3 $\lim_{x^2+y^2 \rightarrow +\infty} (x^4 + 2y^4 - 5x^2y)$

Coordinate polari: $\rho^4 \cos^4 \theta + 2\rho^4 \sin^4 \theta - 5\rho^3 \cos^2 \theta \sin \theta$

$$= \underbrace{\rho^4 (\cos^4 \theta + 2\sin^4 \theta)}_{\geq c > 0} - \underbrace{5\rho^3 \cos^2 \theta \sin \theta}_{\geq -5\rho^3} \geq c\rho^4 - 5\rho^3$$

Considero la funzione $g(\theta) = \cos^4 \theta + 2\sin^4 \theta$. Per $\theta \in [0, 2\pi]$ questa funzione ha un minimo per W. di analisi 1. Questo minimo è il valore $g(\theta_0)$ per un qualche θ_0 ed è strettamente positivo perché altrimenti dovrebbe essere contemporaneamente $\cos \theta_0 = \sin \theta_0 = 0$, che è impossibile. Quindi il minimo di $g(\theta)$ è un certo $c > 0$.

Conseguenza:

$$\underbrace{\text{funzione data}}_{\substack{\uparrow \\ +\infty \\ \text{per confronto.}}} \geq \underbrace{c\rho^4 - 5\rho^3}_{\substack{\downarrow \\ +\infty \text{ essendo } c > 0}}$$

Esempio 4 $\lim_{x^4+y^2 \rightarrow +\infty} x^4 + 2y^4 + 5x^3y$

Idea: se uso $y = -x$ l'ultimo termine vince.

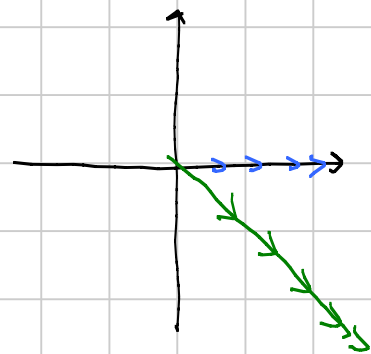
$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t, 0) = \lim_{t \rightarrow +\infty} t^4 = +\infty$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t, -t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} t^4 + 2t^4 - 5t^4 = \lim_{t \rightarrow +\infty} -2t^4 = -\infty$$

— 0 — 0 —

Esempio 5 $\lim_{x^4+y^2 \rightarrow +\infty} x^4 + y^2 + 3x^2y$

Vediamo in coordinate polari



$$\rho^4 \cos^4 \theta + \rho^2 \sin^2 \theta + 3\rho^3 \cos^2 \theta \sin \theta$$

Distinguo due casi:

- se $\cos^4 \theta > 0$, allora il limite è $+\infty$ (analisi 1)

$$\boxed{\rho^4} \left(\cos^4 \theta + \underbrace{\frac{\sin^2 \theta}{\rho^2}}_0 + 3 \underbrace{\frac{\cos^2 \theta \sin \theta}{\rho}}_0 \right) \rightarrow +\infty$$

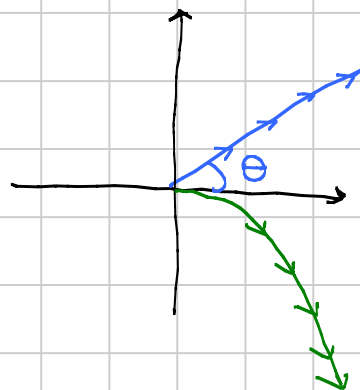
- se $\cos^4 \theta = 0$, allora resta solo $\rho^2 \sin^2 \theta = \rho^2 \xrightarrow{1} +\infty$

In ogni caso tende a $+\infty$.

SPAZZATURA !!! (tutto quanto detto in questa pagina!)

Se io fisso θ , e faccio $\rho \rightarrow +\infty$, vuol dire che vado all'infinito lungo una retta.

Ho quindi dimostrato che il limite è $+\infty$ lungo le rette, e questo NON BASTA.



E infatti con $(t, -t^2)$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t, -t^2) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \underbrace{t^4}_{\rightarrow 0} + \underbrace{t^4}_{\rightarrow 0} - 3 \underbrace{t^4}_{\rightarrow 0} = -\infty$$

Esempio 6 $\lim_{x^2+y^2 \rightarrow +\infty} (x^4 + |y|^\alpha + 7x^5y)$

Per quali valori di α il limite è $+\infty$ oppure N.E.

Qualunque sia α , esistono direzioni in cui fa $+\infty$: ad esempio $(t, 0)$

Una scelta interessante è $(t, -t^{\frac{\alpha}{2}})$. Con questa ottengo:

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t, -t^{\frac{4}{\alpha}}) &= \lim_{t \rightarrow +\infty} t^4 + t^4 - 7 t^5 \cdot t^{\frac{4}{\alpha}} \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} 2t^4 - 7 t^{5 + \frac{4}{\alpha}}\end{aligned}$$

Qualunque sia α , il limite fa $-\infty$ in questa "direzione", quindi globalmente non esiste.

Esempio 7 Se fosse $f(x, y) = x^4 + |y|^\alpha + 7xy$

allo stesso modo otteniamo:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t, t^{\frac{4}{\alpha}}) = \lim_{t \rightarrow +\infty} t^4 + t^4 - 7 t^{1 + \frac{4}{\alpha}}$$

Due casi

- se $1 + \frac{4}{\alpha} \geq 4$, cioè $\frac{4}{\alpha} \geq 3$, cioè $\alpha \leq \frac{4}{3}$, allora il limite fa $-\infty$, quindi globalmente non esiste
- se invece $1 + \frac{4}{\alpha} < 4$, cioè se $\alpha > \frac{4}{3}$, allora il limite fa $+\infty$ anche in questa direzione, quindi per ora posso solo dire che se esiste fa $+\infty$, ma non ho garanzie dell'esistenza.

— o — o —