

Esercizio $f(x,y) = \arctan(xy^2) + y^4 - x^3y^5$

Dim. che l'origine è un p.to stazionario e stabilire di cosa si tratta.

Metodo bovino: faccio il ∇f e vedo che si annulla in $(0,0)$
poi Hessiano per vedere di cosa si tratta (e non funziona perché $Hf(0,0)$ è la matrice nulla)

Taylor $f(x,y) = \underbrace{xy^2 - \frac{1}{3}x^3y^6}_{\arctan t = t - \frac{1}{3}t^3 + \dots} + y^4 - x^3y^5 + o((\sqrt{x^2+y^2})^{14})$

il primo termine che non sto mettendo è $t^5 = x^5y^{10}$ che ha grado 15

Da Taylor vedo subito che

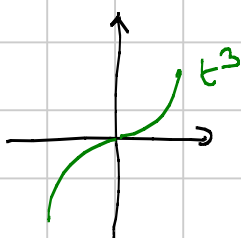
→ $(0,0)$ è un p.to stazionario (non ci sono x e y , o meglio ci sono con coeff. nullo)

→ $Hf(0,0)$ è la matrice nulla perché $f_{xx}(0,0), f_{yy}(0,0), f_{xy}(0,0)$ sono tutte nulle (sarebbero circa i coeff. di x^2, y^2, xy)

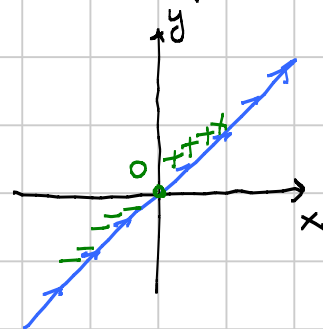
Per capire che $(0,0)$ non è p.to di max/min locale, considero $f(t,t)$

$$\begin{aligned} f(t,t) &= \arctan t^3 + t^4 - t^8 \\ &= t^3 + o(t^3) \end{aligned}$$

quindi vicino all'origine si comporta come t^3



Basta questo per escludere max/min loc. in $(0,0)$



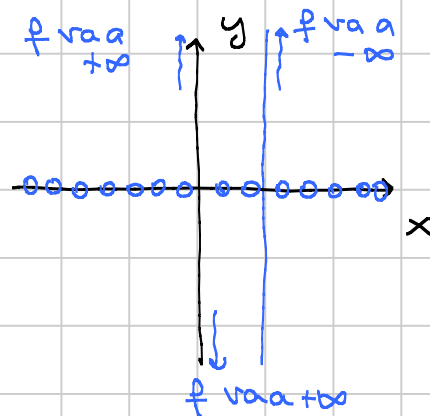
$$f(x,y) = \arctan(xy^2) + y^4 - x^3y^5 \quad \text{Inf / sup su } \mathbb{R}^2$$

$$\text{sup} = +\infty \quad f(0,t) = t^4 \text{ e quindi basta prendere } t \text{ enorme}$$

$$\text{Inf} = -\infty \quad f(t,t) = \arctan t^3 + t^4 - t^8$$

e

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t,t) = -\infty$$



In alternativa basta mettere $x=1$ e quindi

$$f(1,t) = \arctan t^2 + t^4 - t^5 \text{ e per } t \rightarrow \infty \text{ questo tende a } -\infty$$

Inf / sup sul 1° quadrante $x \geq 0, y \geq 0$

Sono ancora $+\infty$ e $-\infty$ perché ho direzioni nel 1° quadrante lungo le quali f tende a $+\infty$ e a $-\infty$

Inf / sup sul 2° quadrante $x \leq 0, y \geq 0$

Facile: $\text{sup} = +\infty \quad f(0,t)$ come prima (con $t \rightarrow +\infty$)

Per quanto riguarda l'inf, di sicuro non è $-\infty$ perché

$$f(x,y) = \arctan(xy^2) + y^4 - x^3y^5 \geq -\frac{\pi}{2} \quad \text{nel 2° quadrante}$$

$\geq -\frac{\pi}{2}$ ≥ 0 ≥ 0
 sempre sempre nel 2° quadrante

Se voglio avvicinarmi a $-\frac{\pi}{2}$, mi serve

- xy^2 molto negativo
- $y^4 \sim 0$
- $x^3y^5 \sim 0$



Se prendessi $f(-t^2, \frac{1}{t}) = \arctan(-1) + \frac{1}{t^4} + \underbrace{t^6 \cdot \frac{1}{t^5}}_{\text{tende a } +\infty} \rightarrow +\infty$

Cambio un attimo esercizio...

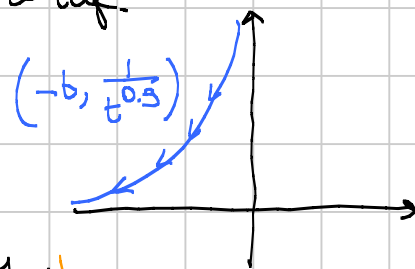
$f(x, y) = \arctan(xy) + y^4 - x^3 y^5$ sempre sul 2° quadrante

Faccio $f(-t, \frac{1}{t}) = \arctan(-1) + \frac{1}{t^4} + \frac{1}{t^2} \rightarrow \arctan(-1) = -\frac{\pi}{4}$

ora faccio $f(-t, \frac{1}{t^{0.9}}) = \arctan(-t^{0.1}) + \frac{1}{t^4} + t^3 \frac{1}{t^{4.5}}$

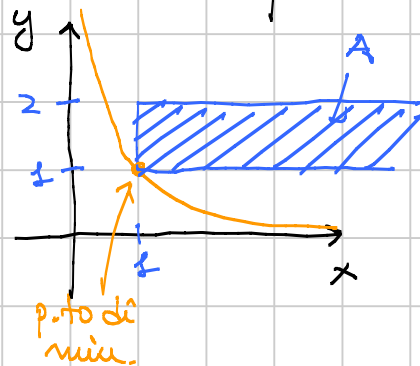
$\downarrow$ $-\frac{\pi}{2}$ $\downarrow$ 0 $\downarrow$ 0

Con questa scelta f va a $-\frac{\pi}{2}$ che quindi è l'inf.



Esercizio $f(x, y) = xy$ inf e sup

$\sup = +\infty$ $f(t, 1)$ con $t \rightarrow +\infty$
 $f(t, 2)$ con $t \rightarrow +\infty$
 $f(t, \frac{3}{2})$ con $t \rightarrow +\infty$



Per l'inf. ho almeno 2 metodi: • Linee di livello, visto che f è molto semplice

• dimostro che $\lim_{\substack{x^2+y^2 \rightarrow +\infty \\ (x,y) \in A}} f(x,y) = +\infty$, a quel p.to il minimo esiste per W. generalizzato e a quel p.to lo trovo con la procedura (ci si riduce a parametrizzare i 3 pezzi del bordo).

Per il limite basta osservare che

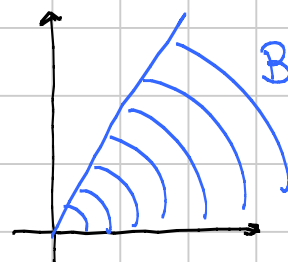
$$f(x,y) \geq x \quad \text{sull'insieme } A$$

Ora se $(x,y) \in A$ e $x^2+y^2 \rightarrow +\infty$, allora per forza anche $x \rightarrow +\infty$.

Altro modo. Faccio vedere che $\lim x$ in B è $+\infty$ dove

$$x = \rho \cos \theta \geq \rho \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{in } B$$

quindi quando $\rho \rightarrow +\infty$ anche $x \rightarrow +\infty$
se resto in B



Se il limite in B fa $+\infty$, il limite in A , che è + piccolo
come insieme, fa $+\infty$ pure.

— o — o —