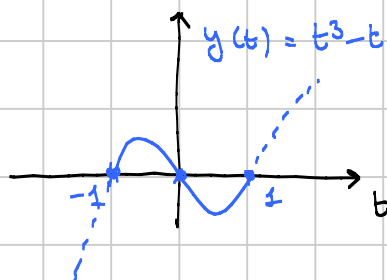
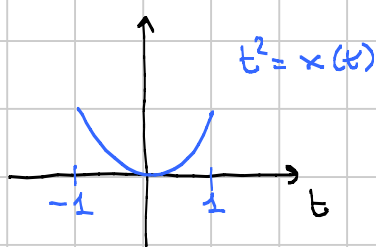


Esercizio 1 $\gamma(t) = (t^2, t^3 - t)$ $t \in [-1, 1]$

Chiusa? $\gamma(-1) = (1, 0)$ $\gamma(1) = (1, 0)$ Sì!

Semplice? Tentativo da fare: vedere se c'è una componente monotona, quindi iniettiva. Qui fallisce per forza (idem tutte le volte che è chiusa)



Proviamo ad impostare il sistema $\gamma(t) = \gamma(s)$

$$\begin{cases} t^2 = s^2 \\ t^3 - t = s^3 - s \end{cases}$$

Questo deve avere come soluzione solo $\rightarrow t = s$

$\rightarrow$ i 2 estremi

Dalla 1ª equazione abbiamo 2 casi: ① $t = s$ (e questo è previsto)

② $t = -s$ sostituisco nella 2ª

$$-s^3 + s = s^3 - s \quad \text{cioè} \quad 2s^3 - 2s = 0, \text{ da cui}$$

$$\boxed{s = -1} \quad \text{Due estremi}$$

$$\boxed{t = 1}$$

$$\boxed{s = 0} \quad s = t$$

$$\boxed{t = 0}$$

$$\boxed{s = 1} \quad \text{Due estremi}$$

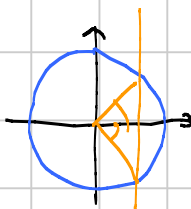
$$\boxed{t = -1}$$

Oss. Altre possibili situazioni: $t^4 = s^4 \Rightarrow t = \pm s$

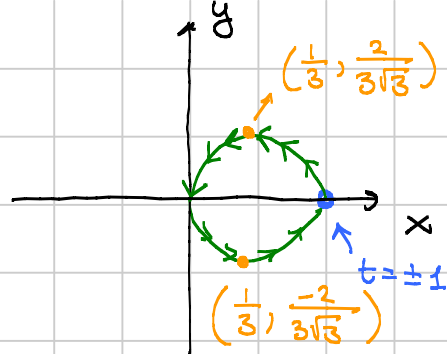
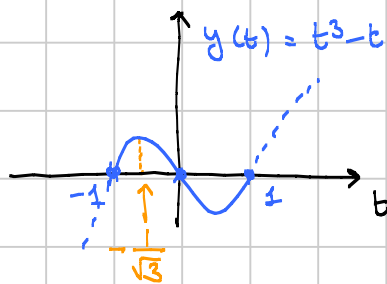
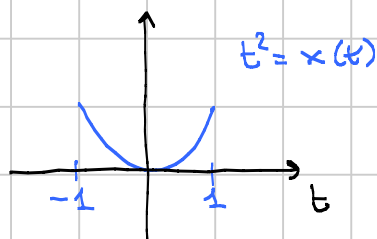
$$\sin t = \sin s \quad (t \text{ ed } s \text{ in } [0, \pi]) \Rightarrow t = s \text{ oppure } t = \pi - s$$

$$\cos t = \cos s \quad (t \text{ ed } s \text{ in } [0, \pi]) \Rightarrow t = s \text{ perché } \cos \text{ è iniettiva in } [0, \pi]$$

$$\cos t = \cos s \quad (t \text{ ed } s \text{ in } [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]) \Rightarrow t = \pm s$$



Disegno?



$$\gamma(1) = \gamma(-1) = (1, 0)$$

$$\gamma(0) = (0, 0)$$

Per t da -1 a 0 , $x(t)$ scende da 1 a 0

$y(t)$ diventa positiva poi scende di nuovo

Per t da 0 a 1 , $x(t)$ risale

$y(t)$ diventa negativa.

Come trovo il p.to più alto e più basso della curva?

Devo fare max / min di $y(t)$

$$y'(t) = 3t^2 - 1$$

$$y'(t) = 0 \Leftrightarrow t^2 = \frac{1}{3} \Leftrightarrow t = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Per $t = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ la curva raggiunge il p.to più alto che è

$$\gamma\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3\sqrt{3}}\right)$$

Per il p.to più basso devo calcolare $\gamma\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

Area racchiusa dalla curva? Area = $\int x \, dy$

γ ← se γ percorre il bordo della zona lasciando la zona a sx

$$= \int_{-1}^1 \underset{\substack{\uparrow \\ x(t)}}{t^2} \underset{\substack{\uparrow \\ y'(t)}}{(3t^2 - 1)} \, dt = \int_{-1}^1 (3t^4 - t^2) \, dt = \text{viene}$$

Integrale sulla zona

$$\int_{\Omega} x^2 y \, dx \, dy$$

$$\int_{\Omega} x y^2 \, dx \, dy$$

dove Ω è la zona delimitata dalla curva,

Il 1° viene o per simmetria: infatti se cambio $(x, y) \rightarrow (x, -y)$ la funzione cambia segno e Ω va in sé perché la curva è simmetrica rispetto all'asse x (in quanto $(x(-t), y(-t)) = (x(t), -y(t))$)

Il secondo va fatto con GG (teo. della divergenza)

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \vec{E} \, dx \, dy = \int_{\partial\Omega^+} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle \, ds$$

tangente ruotato di 90° in senso orario

bordo orientato che lascia la zona a sx

Devo trovare un campo $\vec{E}$ che abbia come divergenza xy^2 .

Ci sono varie scelte, ad esempio

$$\vec{E} = \left(\frac{1}{2} x^2 y^2, 0 \right) \quad \text{oppure} \quad \vec{E} = \left(0, \frac{1}{3} x y^3 \right)$$

Scelto $\vec{E}$, l'integrale a dx si può calcolare o direttamente, oppure con le forme differenziali $\vec{E} = (A, B)$

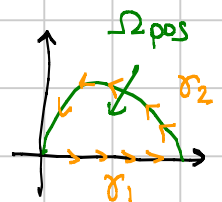
$$\int_{\partial\Omega^+} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle \, ds = \int_{\partial\Omega^+} A \, dy - B \, dx$$

(Ripasso: quando voglio l'area sto integrando $1 \, dx \, dy$, quindi posso prendere $\vec{E} = (x, 0)$ e ottengo $\int_{\gamma} x \, dy$)

Occhio sempre all'orientazione !!!

Altro integrale

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} x^2 |y| \, dx \, dy &= 2 \int_{\Omega_{\text{pos}}} x^2 |y| \, dx \, dy \\ &= 2 \int_{\Omega_{\text{pos}}} x^2 y \, dx \, dy \end{aligned}$$



Questo si fa con il teo. della divergenza con $\vec{E} = \left(\frac{1}{3} x^3 y, 0 \right)$ e a dx mi servono delle curve che percorrano $\partial\Omega_{\text{pos}}$ con l'orientazione giusta

$$\gamma_1(t) = (t, 0) \quad \text{con } t \in [0, 1]$$

$$\gamma_2(t) = (t^2, t^3 - t) \quad \text{con } t \in [-1, 0]$$

Quindi $2 \int_{\Omega_{\text{pos}}} x^2 y \, dx \, dy = 2 \int_{\Omega_{\text{pos}}} \text{div } \vec{E} \, dx \, dy = 2 \int_{\partial \Omega_{\text{pos}}} A \, dy - B \, dx$

$\uparrow$
dopo video

$\uparrow$
0

$$= 2 \int_{\partial \Omega_{\text{pos}}} \frac{1}{3} x^3 y \, dy = \underbrace{\frac{2}{3} \int_{\sigma_1} x^3 y \, dy}_{=0 \text{ perché } y=0 \text{ su } \sigma_1} + \frac{2}{3} \int_{\sigma_2} x^3 y \, dy$$

$\uparrow$
dopo video

$$= \frac{2}{3} \int_{-1}^0 \underbrace{t^6}_{x^3} (t^3 - t) \underbrace{(3t^2 - 1)}_{y'(t)} dt = \text{si fa.}$$

$\uparrow$
y