

Esempio 1 $\int_Q \frac{1}{x+y} dx dy$

$$Q = [0,1] \times [0,1]$$

L'integrale è improprio per colpa dell'integranda.

L'unico problema è in $(0,0)$



1° modo Formule di riduzione

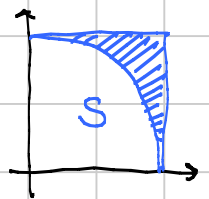
$$= \int_0^1 dx \int_0^1 dy \frac{1}{x+y} = \int_0^1 dx [\log(x+y)]_{y=0}^{y=1} = \int_0^1 (\log(x+1) - \log x) dx$$

e questo si fa stile analisi 1 (si tratta comunque di un int. improp. per colpa del $\log x$)

2° modo L'integrale sul quadrato converge se e solo se converge quello sul settore circolare.

La diff. tra i 2 è l'integrale sulla zona tratteggiata, che è un integrale proprio (numero).

Sul settore uso le coordinate polari



$$\begin{aligned} \int_S \frac{1}{x+y} dx dy &= \int_0^1 \rho d\rho \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\rho \cos \theta + \rho \sin \theta} \cdot \rho d\theta \\ &= \int_0^1 \rho d\rho \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\cos \theta + \sin \theta} d\theta \end{aligned}$$

Nell'intervallo $[0, \frac{\pi}{2}]$ la funzione $g(\theta) = \cos \theta + \sin \theta$ ammette minimo (Weierstrass). Tale minimo è > 0 , perché se fosse nullo vorrebbe dire che $\sin \theta$ e $\cos \theta$ si annullano contemporaneamente, il che è impossibile. Quindi $\cos \theta + \sin \theta \geq m > 0$ per ogni $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

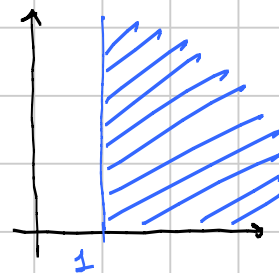
Quindi

$$\frac{1}{\cos \theta + \sin \theta} \leq \frac{1}{m}, \text{ quindi tutto converge.}$$

Esempio 2 $\int_A \frac{1}{x^3+y^3} dx dy$

$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2: x \geq 1, y \geq 0\}$

L'unico problema è la zona di integrazione



1° modo $= \int_1^{+\infty} dx \int_0^{+\infty} dy \frac{1}{x^3+y^3}$

per calcolarlo dovei fare la primitiva in y e
dovei evitarlo

2° modo $= \int_1^{+\infty} dx \int_0^{+\infty} dy \frac{1}{x^3+y^3} \leq \int_1^{+\infty} dx \int_0^{+\infty} dy \frac{1}{1+y^3} \leq \int_1^{+\infty} I dx$

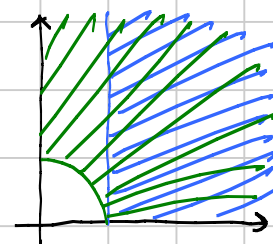
denom. + piccolo

converge perché c'è y^3 , sia I
il suo valore

Ma $\int_1^{+\infty} I dx = +\infty$, quindi ho

dim. che l'integrale dato è $\leq +\infty$, che non è una grande info.

3° modo Penso in coordinate polari



$\rightarrow \int_Q \frac{1}{x^3+y^3} dx dy \leq \int_S \frac{1}{x^3+y^3} dx dy$

dove $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2: x \geq 0, y \geq 0, x^2+y^2 \geq 1\}$.

Ovviamente se converge su S, converge anche su Q.

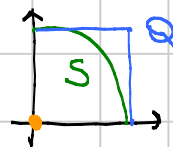
$\rightarrow \int_S \frac{1}{x^3+y^3} dx dy = \int_1^{+\infty} dp \int_0^{\pi/2} d\theta \frac{1}{p^3(\cos^3\theta + \sin^3\theta)}$

$= \int_1^{+\infty} \frac{1}{p^2} dp \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\cos^3\theta + \sin^3\theta} d\theta = \text{numero} \cdot \int_1^{+\infty} \frac{1}{p^2} dp < +\infty$

Integrale tra 0 e $\frac{\pi}{2}$ di una funzione limitata

(stesso motivo di prima: $\cos^3\theta + \sin^3\theta \geq m > 0$ in $[0, \frac{\pi}{2}]$)

Esempio 3 $\int_Q \frac{1}{x^3+y^3} dx dy$ $Q = [0,1] \times [0,1]$



Prendo $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2: x \geq 0, y \geq 0, x^2+y^2 \leq 1\}$

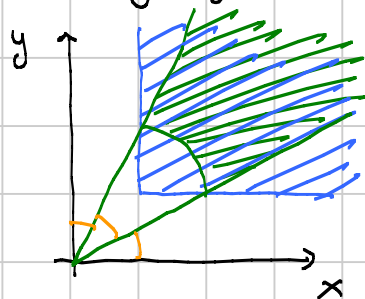
$$\begin{aligned} \int_Q \frac{1}{x^3+y^3} dx dy &\geq \int_S \frac{1}{x^3+y^3} dx dy = \int_0^1 dp \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\rho^3 \frac{1}{\cos^3\theta + \sin^3\theta}} \rho \\ &= \int_0^1 \frac{1}{\rho^2} dp \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\cos^3\theta + \sin^3\theta} d\theta = \text{numero} \cdot \int_0^1 \frac{1}{\rho^2} dp = +\infty \end{aligned}$$

Numero $\underbrace{\qquad}_{=+\infty}$

Esempio 4 $\int_A \frac{xy}{x^4+y^4} dx dy$ $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2: x \geq 1, y \geq 1\}$

Che area tira? $f(x,y) \sim \frac{\rho^2}{\rho^4} = \frac{1}{\rho^2}$

ed è il caso border-line che va male.



$$\int_A \frac{xy}{x^4+y^4} dx dy \geq \int_{S_R} \frac{xy}{x^4+y^4} dx dy$$

dove S_R deve essere un settore contenuto dentro A . Posso prendere

$\frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}$ $\rho \geq R$ non serve determinarlo esplicitamente, basta osservare che sta in A per R grande

$$= \int_R^{+\infty} dp \int_{\pi/6}^{\pi/3} d\theta \frac{\rho^2 \cos\theta \sin\theta}{\rho^4 (\cos^4\theta + \sin^4\theta)} \cdot \rho =$$

$$= \int_R^{+\infty} \frac{1}{\rho} d\rho \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\cos\theta \sin\theta}{\cos^4\theta + \sin^4\theta} d\theta = \text{numero positivo} \cdot \underbrace{\int_R^{+\infty} \frac{1}{\rho} d\rho}_{=+\infty}$$

Integrale su un intervallo di una funzione positiva, quindi è un numero positivo (la funzione è anche limitata per i soliti motivi)

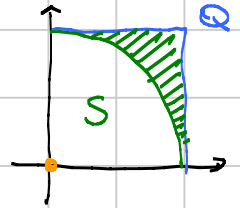
$= +\infty$

Esempio 5 $\int_Q \frac{\arctan(xy)}{x^2+y^2} dx dy$ $Q = [0,1] \times [0,1]$

Dall'analisi sappiamo che $\arctan t \leq t$ per ogni $t \geq 0$ (sarebbe la stessa cosa se ci fosse $\sin t$).

Quindi

$$\int_Q \frac{\arctan(xy)}{x^2+y^2} dx dy \leq \int_Q \frac{xy}{x^2+y^2} dx dy$$



e questo si comporta come l'integrale sul settore S (la differenza è un integrale proprio, quindi un numero)

$$\begin{aligned} \int_S \frac{xy}{x^2+y^2} dx dy &= \int_0^1 \rho d\rho \int_0^{\pi/2} d\theta \frac{\cancel{\rho^2} \sin\theta \cos\theta}{\cancel{\rho^2}} \cdot \rho \\ &= \int_0^1 \rho d\rho \int_0^{\pi/2} \sin\theta \cos\theta d\theta \quad \text{e volendo si calcola esplicitamente (converge)} \end{aligned}$$

Osservazione L'integrale iniziale NON era improprio perché l'integrandi è limitata!

$$0 \leq \frac{\arctan(xy)}{x^2+y^2} \leq \frac{xy}{x^2+y^2} = \frac{\cancel{\rho^2} \cos\theta \sin\theta}{\cancel{\rho^2}} = \cos\theta \sin\theta \leq 1$$

— 0 — 0 —

$$= \frac{1}{2} \sin(2\theta) \leq \frac{1}{2}$$