

INTEGRALI IMPROPRI IN PIÙ VARIABILI

Integrale proprio : $\rightarrow$ zona di integrazione limitata
 $\rightarrow$ funzione integranda limitata

$$\int_A f(x,y,z) dx dy dz$$

$$\int_A f(x,y) dx dy$$

Se manca una, o entrambe, le richieste l'integrale si dice improprio

Esempi

$$\int_A \frac{1}{x^2+y^2} dx dy$$

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 1\}$$

$\uparrow$ zona di integr. limitata (cerchio)

funzione integranda non limitata

in A (tende a $+\infty$ quando $(x,y) \rightarrow (0,0)$)

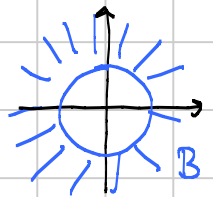
$$\int_B \frac{1}{x^2+y^2} dx dy$$

$$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \geq 1\}$$

$\uparrow$ esterno del cerchio, quindi insieme non limitato

funzione $f(x,y)$ limitata in B :

$$0 \leq f(x,y) \leq 1 \quad \forall (x,y) \in B$$



$$\int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{x^2+y^2} dx dy$$

Qui va male sia la zona sia la funzione.

— o — o —

Come si definiscono? Due casi

① Funzione con problemi in un punto $(x_0, y_0) \in A$

$$\int_A f(x,y) dx dy = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{A \setminus C_\varepsilon} f(x,y) dx dy$$

$\uparrow$
cerchio con centro in (x_0, y_0) e raggio ε



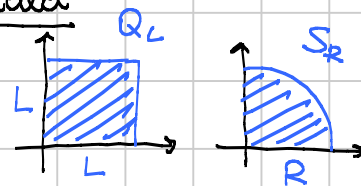
Da buon limite, ha 4 possibilità: $\rightarrow$ convergere ad un numero $\in \mathbb{R}$
 $\rightarrow$ divergere a $+\infty$
 $\rightarrow$ divergere a $-\infty$
 $\rightarrow$ non convergere

Per semplicità, consideriamo solo funzioni $f(x,y) \geq 0$, per cui rimangono solo 2 comportamenti possibili:

$\rightarrow$ convergere
 $\rightarrow$ divergere a $+\infty$.

② Funzione limitata, una zona di integrazione illimitata

Supponiamo $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0\}$



$$\int_A f(x,y) dx dy = \lim_{L \rightarrow +\infty} \int_{Q_L} f(x,y) dx dy \quad Q_L = [0, L] \times [0, L]$$

$$= \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{S_R} f(x,y) dx dy \quad S_R = \{x^2 + y^2 \leq R^2, x \geq 0, y \geq 0\}$$

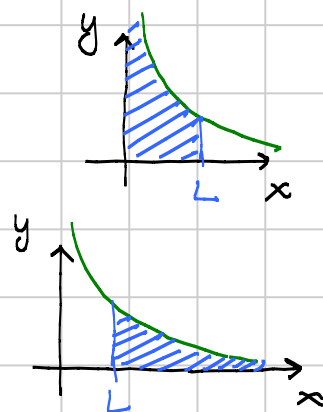
③ Se un integrale ha entrambi i problemi, allora si spezza in sottointegrali, ciascuno con un problema solo.

Operativamente: con le formule di riduzione o cambi di variabile ci si riduce ad integrali impropri in dim 1 $\rightarrow$ Analisi 1

Back to Analisi 1

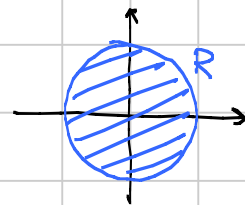
$$\int_0^L \frac{1}{x^a} dx = \begin{cases} \text{converge se } a < 1 \\ \text{diverge a } +\infty \text{ se } a \geq 1 \end{cases}$$

$$\int_L^{+\infty} \frac{1}{x^a} dx = \begin{cases} \text{converge se } a > 1 \\ \text{diverge a } +\infty \text{ se } a \leq 1 \end{cases}$$



Analisi 2

$$\int_{B_R} \frac{1}{(\sqrt{x^2+y^2})^a} dx dy$$



Se passo in coordinate polari diventa

$$\int_0^R dp \int_0^{2\pi} d\theta \frac{1}{p^a} \cdot \underbrace{p}_{\substack{\uparrow \\ J}} = \int_0^R \frac{1}{p^{a-1}} dp \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi \underbrace{\int_0^R \frac{1}{p^{a-1}} dp}_{\text{integr. Analisi 1}}$$

Questo converge $\Leftrightarrow a-1 < 1$, cioè $\Leftrightarrow a < 2$

Tabellina: $\int_{B_R} \frac{1}{(\sqrt{x^2+y^2})^a} dx dy \begin{cases} \nearrow \text{converge se } a < 2 \\ \searrow \text{div. a } +\infty \text{ se } a \geq 2 \end{cases}$

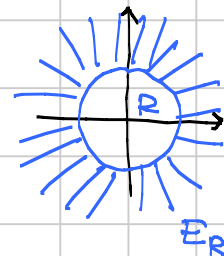
In dimensione 3: $\int_{B_R} \frac{1}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^a} dx dy dz = \text{(coord. sferiche)}$

$$= \int_0^R dp \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \frac{1}{p^a} \underbrace{p^2 \cos \varphi}_J = \int_0^R \frac{dp}{p^{a-2}} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\theta}_{2\pi} \underbrace{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi d\varphi}_2$$

$$= 4\pi \int_0^R \frac{dp}{p^{a-2}} \quad \text{e questo converge se e solo se } \underbrace{a-2}_{-0} < 1, \text{ cioè } a < 3.$$

Discorso analogo vale per gli integrali "fuori dal cerchio":
in dimensione 2

$$\int_{E_R} \frac{1}{(\sqrt{x^2+y^2})^a} dx dy = \begin{cases} \nearrow \text{converge se } a > 2 \\ \searrow \text{div. a } +\infty \text{ se } a \leq 2 \end{cases}$$



Discorso analogo in dimensione 3 con "spatiacque" $a = 3$

— 0 — 0 —

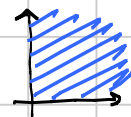
Esercizio: verificare l'affermazione precedente passando in coord. polari o sferiche

Esempio 1 $\int_Q e^{-(x+y)} dx dy$

$Q = 1^o$ quadrante

$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2: x \geq 0, y \geq 0\}$

$$= \int_0^{+\infty} dx \int_0^{+\infty} dy e^{-(x+y)} = \int_0^{+\infty} e^{-x} dx \int_0^{+\infty} e^{-y} dy = (\square)$$



e questi sono integrali impropri in una variabile

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} e^{-y} dy &= \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A e^{-y} dy = \lim_{A \rightarrow +\infty} [-e^{-y}]_0^A \\ &= \lim_{A \rightarrow +\infty} (-e^{-A} + 1) = 1 \end{aligned}$$

$$(\square) = \int_0^{+\infty} e^{-x} dx \cdot 1 = 1 \cdot 1 = 1,$$

Esempio 2 $\int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} dy e^{-(x^2+y^2)}$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy$$

Da Analisi 1 sappiamo che $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy$ converge ad un numero I

quindi l'integrale originale viene I^2 .

In alternativa, passo in coordinate polari:

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \int_0^{+\infty} dp \int_0^{2\pi} d\theta e^{-p^2} \cdot \underbrace{p}_{\int} = 2\pi \int_0^{+\infty} p e^{-p^2} dp = \pi$$

$$\int_0^{+\infty} p e^{-p^2} dp = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A p e^{-p^2} dp = \lim_{A \rightarrow +\infty} \left[-\frac{1}{2} e^{-p^2}\right]_0^A =$$

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{2} e^{-A^2} + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}. \text{ Ora sappiamo che } I = \sqrt{\pi}, \text{ cioè}$$

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}}$$

Integrale di Analisi 1 calcolato con metodo di Analisi 2.