

INTEGRALI SUPERFICIALI

Lunghezza di una curva e integrali curvilinei. Data $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ con $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ si ha

$$\text{lunghezza}(\gamma) = \int_a^b \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 + \dot{z}(t)^2} dt$$

Data $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ si definisce

$$\int_{\gamma} f(x, y, z) ds = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) \underbrace{\sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 + \dot{z}(t)^2}}_{ds} dt$$

Area di una superficie Dato $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ e data $\Phi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ con

$\Phi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$, allora

$$\text{Area}(\text{Sup}) = \int_{\Omega} \sqrt{M_1^2 + M_2^2 + M_3^2} du dv$$

$$\begin{pmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{pmatrix} \quad M_1 = y_u z_v - z_u y_v \quad M_2 = -x_u z_v + z_u x_v \\ M_3 = x_u y_v - y_u x_v$$

Detto altrimenti, (M_1, M_2, M_3) è il vettore che si ottiene a partire dai vettori (x_u, y_u, z_u) e (x_v, y_v, z_v) applicando la "formula misteriosa", cioè il prodotto vettore. Volendo

$$\underbrace{(M_1, M_2, M_3)}_{\substack{\uparrow \\ \text{vettore normale} \\ \text{alla superficie}}} = \underbrace{(x_u, y_u, z_u)}_{\substack{\uparrow \\ \text{generano il piano} \\ \text{tangente alla} \\ \text{superficie}}} \wedge \underbrace{(x_v, y_v, z_v)}_{\substack{\uparrow \\ \text{tangente alla} \\ \text{superficie}}} = \Phi_u \wedge \Phi_v$$

Integrali superficiali. Data una superficie $\Phi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ e data $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ si definisce l'integrale superficiale

$$\int_S f(x, y, z) d\sigma = \int_{\Omega} f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \sqrt{M_1^2 + M_2^2 + M_3^2} du dv$$

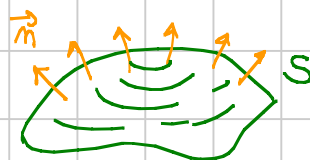
superficie

indica che si tratta di un integrale superficiale

Caso particolare Integrali superficiali di flusso.

- Ingredienti:
- un campo vettoriale $\vec{E} = (A, B, C)$ definito in $\mathbb{R}^3$
 - una superficie $\Phi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$
 - una scelta $\vec{n}$ del VETTORE normale alla sup.

Si definisce flusso del vettore $\vec{E}$ attraverso la superficie Φ nella direzione data da $\vec{n}$ l'integrale



$$\int_S \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle d\sigma$$

Matematicamente, ho 2 possibilità per $\vec{n}$:

$$\pm \frac{(M_1, M_2, M_3)}{\sqrt{M_1^2 + M_2^2 + M_3^2}}$$

si cancella con la stessa radice presente nel $d\sigma$

quindi

$$\int_S \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle d\sigma = \pm \int_{\Omega} (AM_1 + BM_2 + CM_3) du dv$$

dipende dalla scelta di $\vec{n}$.

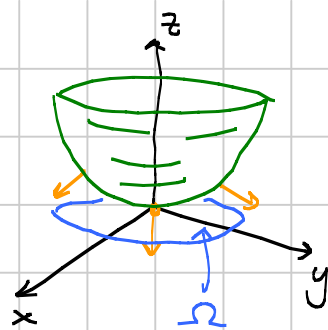
componenti di $\vec{E}$

Esempio Sia S la superficie grafico di $z = x^2 + y^2$
con $x^2 + y^2 \leq 1$.

Calcolare il flusso di

$$\vec{E} = (x, 0, y+z)$$

prendendo come normale quella
orientata verso il basso



ROAD MAP: $\rightarrow$ parametrizzare la superficie ①
 $\rightarrow$ trovare il vettore $\vec{n}$ ②
 $\rightarrow$ calcolare l'integrale ③

① È una sup. cartesiana (vedi 1ª les. sulle sup.), quindi

$$\Phi(u, v) = (u, v, u^2 + v^2) \quad \Omega = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u^2 + v^2 \leq 1\}$$

② Calcolo Φ_u e Φ_v e faccio il prodotto vettore (formula mista.)

$$\begin{aligned} \Phi_u &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2u \end{pmatrix} \\ \Phi_v &\rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2v \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (M_1, M_2, M_3) = (-2u, -2v, 1)$$

vettore normale

Controllando in $(u, v) = (0, 0)$ viene $(0, 0, 1)$ che è l'opposto
di quello che serve a me. Dovrò mettere un segno $-$.

$$\textcircled{3} \text{ Flusso} = \underbrace{-}_{\substack{\uparrow \\ \text{orientazione!}}} \int_{\Omega} (AM_1 + BM_2 + CM_3) du dv$$

$$= - \int_{\Omega} [x M_1 + 0 \cdot M_2 + (y+z) M_3] du dv$$

al posto di x, y, z
metto le comp.
della sup.

$$= - \int_{\Omega} [u(-2u) + (v + u^2 + v^2) 1] du dv$$

$$= - \int_{\Omega} (-2u^2 + v + u^2 + v^2) du dv = \int_{\Omega} (u^2 - v^2 - v) du dv$$

e si fa ad esempio in coord. polari e viene 0 per simm.

GAUSS-GREEN IN DIMENSIONE 3

- Ingredienti :
- un insieme $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$
 - un campo vettoriale $\vec{E}$ in $\mathbb{R}^3$
 - una funzione $f(x, y, z)$ $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$

$$\int_{\Omega} f \operatorname{div} \vec{E} \, dx \, dy \, dz = \int_{\partial\Omega} f \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle \, d\sigma - \int_{\Omega} \langle \nabla f, \vec{E} \rangle \, dx \, dy \, dz$$

bordo di Ω , cioè
una superficie

int. superficiale
vettore normale
ESTERNO risp.
ad Ω

Caso speciale $f(x, y, z) \equiv 1$, cioè funzione costante.
La formula diventa

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \vec{E} \, dx \, dy \, dz = \int_{\partial\Omega} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle \, d\sigma$$

Quindi: il flusso di un vettore $\vec{E}$ uscente da una superficie che è bordo di un insieme Ω , è uguale all'integrale della divergenza di $\vec{E}$ dentro l'insieme Ω .

Achtung! In dimensione 2 l'integrale di flusso si interpreta a sua volta come integrale di una forma differenziale. In dim 3 questo non succede, quindi a destra resta un integrale superficiale.