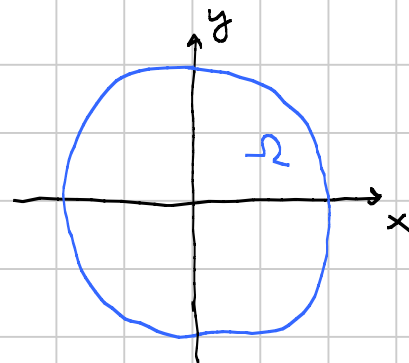


$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \vec{E} \, dx \, dy = \int_{\partial\Omega} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle \, ds = \int_{\partial\Omega} A \, dy - B \, dx$$

Esempio 1 Sia $\vec{E} = (y \arctan y^2, \sin x \cdot 3^x)$

$$\text{Sia } \Omega = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1 \}$$

Calcolare il flusso di $\vec{E}$ uscente da $\partial\Omega$



1° modo Uso la definizione $\text{Flusso} = \int_{\partial\Omega} \vec{E} \cdot \vec{n} \, ds$
 Parametrizzo $\partial\Omega$, calcola vettore
 tangente e normale, poi faccio l'integrale curvilineo.

2° modo Uso GG e il flusso richiesto è $\int_{\Omega} \operatorname{div} \vec{E} \, dx \, dy$, cioè 0

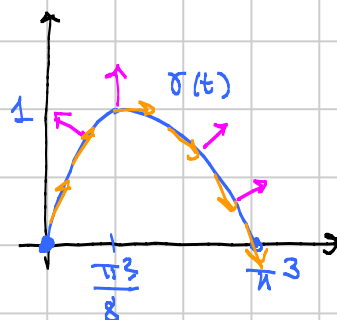
Osservazione generale Se dobbiamo calcolare il flusso di $\vec{E}$ uscente da un insieme dato, può essere utile ridursi a calcolare l'integrale della divergenza nell'insieme.

Esempio 2 Sia $\vec{E} = (y \arctan y^2, \sin x \cdot 3^x)$
 Sia $\gamma(t) = (t^3, \sin t)$ $t \in [0, \pi]$

$\gamma(t)$ non è chiusa perché $\gamma(0) \neq \gamma(\pi)$.

È una curva semplice perché la prima componente è iniettiva.

Voglio calcolare il flusso di $\vec{E}$ uscente da γ con la normale che punta verso l'alto.



1° modo Formula con le forme differenziali

$$\int_{\gamma} \vec{E} \cdot \vec{n} \, ds = \int_{\gamma} A \, dy - B \, dx. \text{ Quest'ultimo lo calcolo con la definizione e diventa}$$

$$= \int_0^{\pi} (A(x(t), y(t)) \dot{y}(t) - B(x(t), y(t)) \dot{x}(t)) \, dt$$

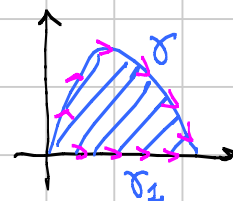
$$= \int_0^{\pi} \{ (\sin t \cdot \arctan \sin^2 t) \cos t - \sin t^3 \cdot e^{t^3} \cdot 3t^2 \} \, dt = \text{si fa}$$

POI CAMBIO SEGNO PERCHÈ L'ORIENTAZIONE DEVE ESSERE ORARIA

2° modo Considero l'insieme Ω delimitato da γ e dall'asse x .

Per GG si ha che

$$\int_{\partial\Omega} \langle \vec{E} \cdot \vec{n} \rangle \, ds = \int_{\Omega} \operatorname{div} \vec{E} \, dx \, dy = 0$$



$$= \int_{\partial\Omega} A \, dy - B \, dx$$

$$\gamma_1(t) = (t, 0) \quad t \in [0, \pi^3]$$

Ora l'integrale su $\partial\Omega$ è fatto da 2 pezzi: la curva γ che percorre la parte alta di $\partial\Omega$ e il tratto di asse x .

$$0 = \int_{\partial\Omega} A \, dy - B \, dx = - \int_{\gamma} A \, dy - B \, dx \quad (+) \quad \int_{\gamma_1} A \, dy - B \, dx$$

Quindi il flusso che volevo, cioè quello su γ , è dato da

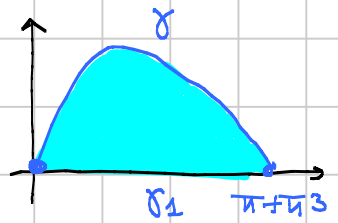
$$\int_{\gamma_1} A \, dy - B \, dx = \int_0^{\pi^3} \underbrace{0}_{A \, dy} - \underbrace{(\sin t \cdot 3t^2)}_{B \, dx} \, dt$$

Aggiunto dopo video:
c'è un ulteriore cambio di segno perché a me serve $-\int_{\gamma} \vec{E} \cdot \vec{n} \, ds$

Osservazione generale Come usare GG quando la curva non è il bordo di un insieme? Basta aggiungere una curva semplice che lo completi rendendolo un bordo.

Esempio 3 $\gamma(t) = (t+t^3, \sin t)$ $t \in [0, \pi]$

Come prima è una curva semplice non chiusa. Voglio calcolare l'area tra la curva e l'asse x .



1° modo Provo a scrivere Ω come insieme normale

$$\Omega = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq \pi + \pi^3, 0 \leq y \leq ? \}$$

Per calcolare ? devo risolvere $\begin{cases} x = t+t^3 \\ y = \sin t \end{cases} \rightarrow$ ricavo t in funz. di x e sostituisco

2° modo Formule alla GG

$$\text{Area}(\Omega) = \int_{\partial\Omega} x dy = - \int_{\partial\Omega} y dx$$

Da cosa è fatto $\partial\Omega$? Da due pezzi:

- $\gamma_1(t) = (t, 0)$ con $t \in [0, \pi + \pi^3]$ percorsa normalmente
- $\gamma_2(t) = \gamma$ data percorsa in senso inverso.

Quindi

$$\text{Area}(\Omega) = \int_{\gamma_1} x dy \overset{\text{senso inverso}}{\ominus} \int_{\gamma} x dy = \int_0^{\pi+\pi^3} \underbrace{t}_{x} \cdot \underbrace{0}_{dy} dt - \int_0^{\pi} \underbrace{(t+t^3)}_x \cos t dt$$

e questo si fa veramente.

In alternativa

$$\begin{aligned} \text{Area}(\Omega) &= - \int_{\partial\Omega} y dx = - \int_{\gamma_1} y dx + \int_{\gamma} y dx \\ &= \int_0^{\pi+\pi^3} \underbrace{0}_{y} dt + \int_0^{\pi} \underbrace{\sin t}_y \underbrace{(3t^2+1)}_{dx} dt \end{aligned}$$

Esempio 4 Calcolare $\iint_{\Omega} xy \, dx \, dy$, dove Ω è quello di prima

Uso G.G. nella formula $\int_{\Omega} \operatorname{div} \vec{E} \, dx \, dy = \int_{\partial\Omega} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle \, ds$

$$= \int_{\partial\Omega} A \, dy - B \, dx$$

Vi serve un campo $\vec{E}$ tale che $\operatorname{div} \vec{E} = xy$, ad esempio

$$\vec{E} = \left(\underbrace{\frac{1}{2} x^2 y}_A, \underbrace{0}_B \right) \quad \text{oppure} \quad \left(0, \frac{1}{2} x y^2 \right)$$

Allora

$$\int_{\Omega} xy \, dx \, dy = \int_{\partial\Omega} A \, dy - B \, dx = \int_{\partial_1} A \, dy - B \, dx - \int_{\partial_2} A \, dy - B \, dx$$

$$= \int_0^{\pi+\pi^3} \underbrace{A \dots 0}_{\substack{\uparrow \\ dy \text{ su } \partial_1}} \, dt - \underbrace{B \cdot \pi(t)}_{\substack{\uparrow \\ 0}} \, dt$$

$$= \int_0^{\pi} \left[\underbrace{\frac{1}{2} (t+t^3) \sin t}_A \underbrace{\cos t}_{\substack{\uparrow \\ dy}} - \underbrace{0}_{\substack{\uparrow \\ B=0}} \right] dt$$

Controllare cosa viene usando $\vec{E} = (0, \frac{1}{2} x y^2)$.

— 0 — 0 —