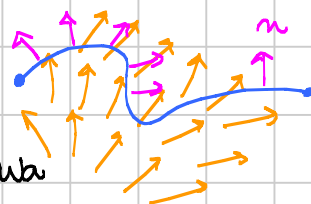


INTEGRALI DI FLUSSO IN $\mathbb{R}^2$

Ingredienti: • un campo di vettori $\vec{E} = (A, B)$

• una curva $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$

• una scelta del vettore normale alla curva



La curva la posso

orientare con il vettore

normale da una parte o

dall'altra

Def. Si dice flusso del vettore $\vec{E}$ attraverso la curva γ con vettore normale $\vec{n}$ il numero

$$\int_{\gamma} \underbrace{\vec{E} \cdot \vec{n}}_{\substack{\uparrow \\ \text{prodotto} \\ \text{scalare}}} ds \quad \leftarrow \text{integrale curvilineo}$$

Qss. Se $\vec{E}$ rappresenta la velocità dell'acqua di un fiume, allora l'integrale di flusso rappresenta la quantità di acqua che scorre attraverso la curva per unità di tempo.

Operativamente Sia $\vec{E} = (A(x, y), B(x, y))$

sia $\gamma(t) = (x(t), y(t))$

Allora il vettore tangente alla curva è $(\dot{x}(t), \dot{y}(t))$. Il vettore normale si ottiene ruotando il tangente di 90° in senso orario o antiorario, a seconda della scelta fatta. Le 2 possibilità sono

$$(-\dot{y}(t), \dot{x}(t))$$

rot. antioraria

$$(\dot{y}(t), -\dot{x}(t))$$

rot. oraria

Di conseguenza il vettore normale è

$$\vec{n} = \left(\frac{-\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}, \frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} \right)$$

$$\vec{n} = \left(\frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}, \frac{-\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} \right)$$

Quando scrivo l'integrale curvilineo le radici se ne vanno, quindi

$$\int_{\gamma} \vec{E} \cdot \vec{n} \, ds = \int_a^b \langle (A, B), \left(\frac{-\dot{y}}{\sqrt{\quad}}, \frac{\dot{x}}{\sqrt{\quad}} \right) \rangle \sqrt{\quad} \, dt$$

$$= \int_a^b (-A \dot{y} + B \dot{x}) \, dt$$

$$= \int_a^b (-A(x(t), y(t)) \dot{y}(t) + B(x(t), y(t)) \dot{x}(t)) \, dt$$

Achtung! I segni sono quelli opposti se il vettore normale prescelto è quello opposto.

Scelta classica

La scelta del vettore normale in assenza di specificazioni è quella ruotata di 90° in senso orario rispetto al tangente, cioè con $(\dot{y}, -\dot{x})$ che porta alla formula

$$\int_{\gamma} \vec{E} \cdot \vec{n} \, ds = \int_a^b A \dot{y} - B \dot{x} \, dt$$

— 0 — 0 —

Integrali di flusso vs forme differenziali

Dalla formula precedente si ottiene che

$$\text{Flusso di } \vec{E} \text{ attraverso } \gamma \text{ (con } \vec{n} \text{ orario)} = \int_{\gamma} \vec{E} \cdot \vec{n} \, ds$$

$$= \int_a^b A \dot{y} - B \dot{x} \, dt = \int_{\gamma} A dy - B dx$$

integrale su γ della forma diff. $A dy - B dx$

— 0 — 0 —

GAUSS - GREEN IN 2 VARIABILI

Ingredienti : $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ insieme di integrazione

$f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ funzione

$\vec{E}$ campo di vettori in Ω $\vec{E} = (A(x,y), B(x,y))$

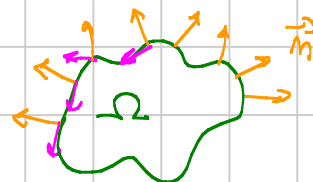
$$\int_{\Omega} f \operatorname{div} \vec{E} \, dx \, dy = \int_{\partial\Omega} f \vec{E} \cdot \vec{n} \, ds - \int_{\Omega} \langle \nabla f, \vec{E} \rangle \, dx \, dy$$

bordo di Ω

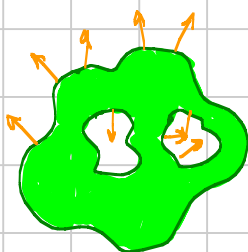
è il vettore normale

a $\partial\Omega$ USCENTE = normale ESTERNA

$\vec{n}$ è il vettore normale orario per un ormino che percorre il $\partial\Omega$ tenendo Ω a sinistra.



Esempio



In questo esempio, $\partial\Omega$ è costituito da 3 curve. Se voglio che il vettore normale sia quello orario, devo percorrere la curva esterna in senso antiorario e quelle interne in senso orario. Con queste scelte mi tengo Ω a sinistra durante il percorso.

Osservazione La formula di GG è l'equivalente per gli integrali doppi dell'integrazione per parti dell'analisi 1.

Caso speciale 1 Supponiamo che $\vec{E} = \nabla g$. Allora GG diventa

$$\int_{\Omega} f \Delta g \, dx \, dy = \int_{\partial\Omega} f \underbrace{\nabla g \cdot \vec{n}}_{\frac{\partial g}{\partial n}} \, ds - \int_{\Omega} \langle \nabla f, \nabla g \rangle \, dx \, dy$$

$\frac{\partial g}{\partial n}$ = derivata di g nella direzione $\vec{n}$

Caso speciale 2 Supponiamo che $f(x,y) \equiv 1$ (funzione costante).

Allora G.G. diventa

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \vec{E} \, dx \, dy = \int_{\partial\Omega} \vec{E} \cdot \vec{n} \, ds$$

↑
integrale interno della
divergenza.

↑
flusso di $\vec{E}$ uscente da $\partial\Omega$

In termini di forme differenziali, se $\vec{E} = (A, B)$, allora si
riscrive come

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \vec{E} \, dx \, dy = \int_{\partial\Omega} A \, dy - B \, dx$$

↑
curva che percorre $\partial\Omega$ tenendo
 Ω a SINISTRA

Casi speciali 3 Cosa succede nella formula sopra se $\vec{E} = (x, 0)$?

$$\int_{\Omega} 1 \, dx \, dy = \int_{\partial\Omega} x \, dy$$

" Area(Ω)

Se invece uso $\vec{E} = (0, y)$ ottengo

$$\operatorname{Area}(\Omega) = \int_{\Omega} 1 \, dx \, dy = - \int_{\partial\Omega} y \, dx$$

Se prendo $\vec{E} = (\frac{1}{2}x, \frac{1}{2}y)$ ottengo (ma potrei anche $\vec{E} = (\frac{1}{3}x, \frac{2}{3}y)$)

$$\operatorname{Area}(\Omega) = \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} x \, dy - y \, dx$$

— 0 — 0 —