

GRADIENTE, DIVERGENZA, ROTORE, LAPLACIANO

Def. Data $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ si definisce $\nabla f = (f_x, f_y)$] GRADIENTE
 " $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ si definisce $\nabla f = (f_x, f_y, f_z)$] di f
 (stessa cosa se f è definita in $A \subseteq \mathbb{R}^2$ o in $A \subseteq \mathbb{R}^3$)

Def. Dato un campo $\vec{E}$ definito in un insieme $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$, diciamo
 $\vec{E}(x,y) = (A(x,y), B(x,y))$
 si definisce divergenza di $\vec{E}$ il numero

$$\operatorname{div} \vec{E} = A_x(x,y) + B_y(x,y)$$

Analogamente in $\mathbb{R}^3$, dato $\vec{E}(x,y,z) = (A(x,y,z), B(x,y,z), C(x,y,z))$
 si definisce

$$\operatorname{div} \vec{E} = A_x(x,y,z) + B_y(x,y,z) + C_z(x,y,z)$$

Def. Data $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ si definisce Laplaciano di f il numero

$$\Delta f(x,y) = f_{xx}(x,y) + f_{yy}(x,y)$$

Se $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, allora $\Delta f(x,y,z) = f_{xx} + f_{yy} + f_{zz}$.

Def. Solo in dimensione 3, dato un campo $\vec{E} = (A,B,C)$,
 si definisce ROTORE di $\vec{E}$ (CURL in inglese) il vettore ottenuto
 sviluppando formalmente il determinante

$$\begin{pmatrix} i & j & k \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ A & B & C \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = (C_y - B_z, A_z - C_x, B_x - A_y)$$

Oss.

	INPUT	OUTPUT
gradiente	scalare	vettore
divergenza	vettore	scalare
rotore	vettore	vettore
Laplaciano	funzione	funzione

Esempi $f(x, y, z) = x^2 + y e^{2z} + x z^2$

$$\nabla f(x, y, z) = (2x + z^2, e^{2z}, 2y e^{2z} + 2xz)$$

$$\Delta f(x, y, z) = \underset{\substack{\uparrow \\ f_{xx}}}{2} + \underset{\substack{\uparrow \\ f_{yy}}}{0} + \underbrace{4y e^{2z} + 2x}_{\substack{\uparrow \\ f_{zz}}} = 2 + 2x + 4y e^{2z}$$

$$\vec{E}(x, y, z) = (2x + z, -3y^2 + xz, x^2 - z)$$

$$\operatorname{div} \vec{E} = \underset{\substack{\uparrow \\ A_x}}{2} - \underset{\substack{\uparrow \\ B_y}}{6y} - \underset{\substack{\uparrow \\ C_z}}{1} = 1 - 6y$$

$$\begin{pmatrix} i & j & k \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ 2x+z & -3y^2+xz & x^2-z \end{pmatrix} \quad \operatorname{rot} \vec{E} = \left(\underbrace{-x}_{C_y - B_z}, \underbrace{1-2x}_{A_z - C_x}, \underbrace{z}_{B_x - A_y} \right)$$

— 0 — 0 —

Facciamo un po' di composizioni

$$\textcircled{1} \operatorname{div}(\nabla f) = \operatorname{div}(f_x, f_y, f_z) = f_{xx} + f_{yy} + f_{zz} = \Delta f$$

$$\textcircled{2} \Delta f = \text{traccia di } Hf \quad (Hf \text{ è la matrice Hessiana})$$

$$\textcircled{3} \operatorname{rot}(\nabla f) = \operatorname{rot}(f_x, f_y, f_z) = (f_{zy} - f_{yz}, f_{xz} - f_{zx}, f_{yx} - f_{xy}) = (0, 0, 0) \text{ per l'inversione dell'ordine di derivazione}$$

$\operatorname{rot}(\nabla f) = (0, 0, 0)$

③ Se $\nabla f = \vec{0}$, e l'insieme di definizione di f è connesso, allora f è costante. Di conseguenza, se $\nabla f = \nabla g$, allora $\nabla(f-g) = \nabla f - \nabla g = \vec{0}$, quindi $f-g$ è costante.

⑤ se $\text{rot } \vec{E} = (0,0,0)$, allora $\vec{E} = \nabla f$ (se l'insieme di definizione è semplicemente connesso).

Di conseguenza, se $\text{rot } \vec{E} = \text{rot } \vec{F}$, allora $\text{rot } (\vec{E} - \vec{F}) = (0,0,0)$ quindi $\vec{E} - \vec{F}$ è il gradiente di un potenziale.

⑥ Se $\text{div } \vec{E} = 0$, e l'insieme di definizione è stellato, allora $\vec{E}$ è un rotore, cioè $\vec{E} = \text{rot } (A,B,C)$ per un opportuno (A,B,C) .

Di conseguenza, se $\text{div } \vec{E} = \text{div } \vec{F}$, allora

$\text{div } (\vec{E} - \vec{F}) = 0$, ma allora

$$\vec{E} - \vec{F} = \text{rot } (A,B,C)$$

— o — o —

Esercizio Data f funzione ed $\vec{E}$ vettore, calcolare $\text{div } (f\vec{E})$.

Indico $\vec{E} = (A,B,C)$. Allora

$$\text{div } (f\vec{E}) = \text{div } (fA, fB, fC) = (fA)_x + (fB)_y + (fC)_z$$

$$= \underline{f_x A} + \underline{f A_x} + \underline{f_y B} + \underline{f B_y} + \underline{f_z C} + \underline{f C_z}$$

$$= \underline{f \text{div } \vec{E}} + \underline{\nabla f \cdot \vec{E}}$$