

AREA DI UNA SUPERFICIECaso parametrico

$$\text{Area}(S) = \iint_A \sqrt{M_1^2 + M_2^2 + M_3^2} \, du \, dv$$

Superficie cartesiana

$$z = f(x, y) \quad \text{con} \quad (x, y) \in A \subseteq \mathbb{R}^2$$

Passo in parametrica: $(u, v, f(u, v))$
 $\quad \quad \quad x \quad y \quad z$

Scrivo la matrice

$$\begin{pmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & f_u(u, v) \\ 0 & 1 & f_v(u, v) \end{pmatrix}$$

$$(M_1, M_2, M_3) = (-f_u(u, v), -f_v(u, v), 1)$$

$$\text{Area}(S) = \iint_A \sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2} \, du \, dv$$

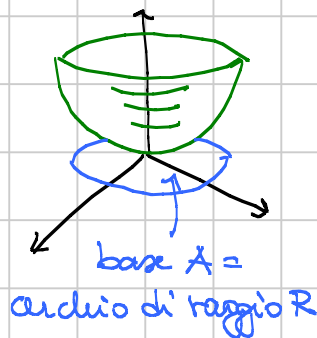
(è la formula analoga di $\text{lunghezza}(r) = \int_a^b \sqrt{1 + \dot{r}^2(t)} \, dt$ per le curve cartesiane)

Esempio 1 $z = x^2 + y^2$. Voglio calcolare l'area della parte che si proietta su $x^2 + y^2 \leq R^2$.

Ora $f(x, y) = x^2 + y^2$

$$\begin{aligned} \text{Area}(S) &= \iint_A \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} \, dx \, dy \\ &= \iint_A \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} \, dx \, dy \end{aligned}$$

Lo calcolo in polari



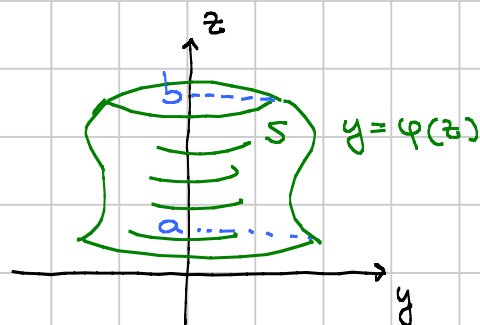
$$= \int_0^R \rho \, d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \sqrt{1+4\rho^2} \cdot \underset{\text{pag.}}{\rho} = 2\pi \int_0^R \rho \sqrt{1+4\rho^2} \, d\rho$$

$$= 2\pi \left[(1+4\rho^2)^{\frac{3}{2}} \frac{2}{3} \frac{1}{8} \right]_0^R = \text{O.k.}$$

SUPERFICI DI ROTAZIONE

Sto ruotando una curva di eq.

$$y = \varphi(z) \text{ con } a \leq z \leq b$$



Descrizione parametrica della superficie con parametri z e θ

$$\underbrace{(\varphi(z) \cos \theta, \varphi(z) \sin \theta, z)}_{\substack{\text{sono coordinate cilindriche} \\ \text{con } \rho = \varphi(z)}} \quad a \leq z \leq b, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

Calcolo la matrice

$$\begin{pmatrix} x_\theta & y_\theta & z_\theta \\ x_z & y_z & z_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\varphi(z) \sin \theta & \varphi(z) \cos \theta & 0 \\ \dot{\varphi}(z) \cos \theta & \dot{\varphi}(z) \sin \theta & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} (M_1, M_2, M_3) &= (\varphi(z) \cos \theta, \varphi(z) \sin \theta, -\varphi(z) \dot{\varphi}(z) \sin^2 \theta - \varphi(z) \dot{\varphi}(z) \cos^2 \theta) \\ &= (\varphi(z) \cos \theta, \varphi(z) \sin \theta, -\varphi(z) \dot{\varphi}(z)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{M_1^2 + M_2^2 + M_3^2} &= \sqrt{\varphi(z)^2 \cos^2 \theta + \varphi(z)^2 \sin^2 \theta + \varphi(z)^2 \dot{\varphi}(z)^2} \\ &= \sqrt{\varphi(z)^2 (1 + \dot{\varphi}(z)^2)} = \varphi(z) \sqrt{1 + \dot{\varphi}(z)^2} \end{aligned}$$

Conclusione

$$\text{Area}(S) = \int_a^b dz \int_0^{2\pi} d\theta \varphi(z) \sqrt{1 + \dot{\varphi}(z)^2} \text{ da cui}$$

$$\text{Area}(S) = 2\pi \int_a^b \varphi(z) \sqrt{1 + \dot{\varphi}(z)^2} \, dz$$

Area di una superficie di rotazione

Teorema (GULDINO 2) L'area di una sup. di rotazione è uguale a

(lunghezza curva che ruota) · (lunghezza del percorso del baricentro della curva)

In formule

$$\text{Area}(S) = \text{lunghe}(\gamma) \cdot 2\pi y_G$$

↑ coord. y del baricentro della curva.

Dim. $y_G = \frac{1}{\text{lunghe}(\gamma)} \cdot \underbrace{\int_{\gamma} y \, ds}_{\text{integrale curvilineo}}$

In questo caso la curva ha parametrizzazione

$(\underbrace{\varphi(t)}_y, \underbrace{t}_z)$ con $t \in [a, b]$,

quindi

$$\int_{\gamma} y \, ds = \int_a^b \underbrace{\varphi(t)}_y \underbrace{\sqrt{\dot{\varphi}(t)^2 + 1}}_{\dot{y}^2 + \dot{z}^2} dt$$

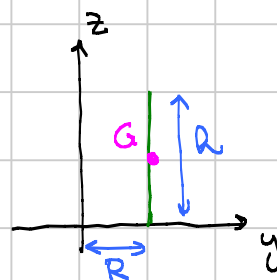
Quindi

$$\begin{aligned} \text{lunghe}(\gamma) \cdot 2\pi y_G &= \cancel{\text{lunghe}(\gamma)} \cdot 2\pi \frac{1}{\cancel{\text{lunghe}(\gamma)}} \int_a^b \varphi(t) \sqrt{1 + \dot{\varphi}^2(t)} \, dt \\ &= \text{Area}(S). \end{aligned}$$

— o — o —

Esempio 1 Sup. laterale cilindro

$$\text{Sup}(S) = \text{lunghe}(\gamma) \cdot 2\pi y_G = R \cdot 2\pi R$$

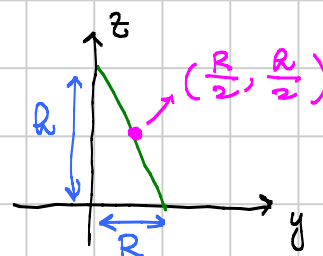


Esempio 2 Sup. laterale cono

$$\text{Sup}(S) = \text{lunghe}(\gamma) \cdot 2\pi y_G =$$

$$= \sqrt{R^2 + R^2} \cdot 2\pi \frac{R}{2}$$

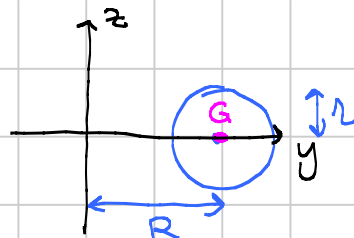
$$= \pi R \sqrt{R^2 + R^2}$$



Esempio 3 Toro

$$\text{Sup}(S) = \text{length}(\gamma) \cdot 2\pi y_G$$

$$= 2\pi r \cdot 2\pi R = 4\pi^2 r R$$



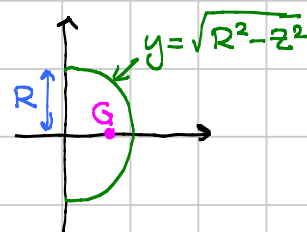
Esempio 4 Sfera

Non è evidente dove si trova il baricentro.

Abbiamo 2 opzioni

→ calcolare G con la formula (vedi les. con.)

→ usare la formula diretta per l'area



$$\text{Area}(S) = 2\pi \int_{-R}^R \varphi(z) \sqrt{1 + \dot{\varphi}^2(z)} dz \quad \text{con } \varphi(z) = \sqrt{R^2 - z^2}$$

$$\dot{\varphi}(z) = \frac{-2z}{2\sqrt{R^2 - z^2}} = \frac{-z}{\sqrt{R^2 - z^2}}$$

$$1 + \dot{\varphi}^2(z) = 1 + \frac{z^2}{R^2 - z^2} = \frac{R^2}{R^2 - z^2}$$

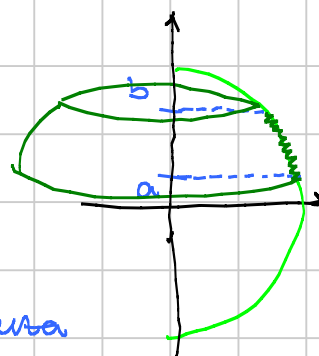
$$\text{Area}(S) = 2\pi \int_{-R}^R \sqrt{R^2 - z^2} \frac{R}{\sqrt{R^2 - z^2}} dz = 2\pi R \int_{-R}^R 1 dz = 4\pi R^2$$

Oss.1 Se volessi la sup. di un segmento sferico.

Otengo allo stesso modo

$$\text{Area} = 2\pi R \int_a^b 1 dz = 2\pi R (b-a)$$

dipende solo dalla differenza



Oss.2 Guldino 2 lo posso riscrivere come

$$\text{Area}(S) = 2\pi \int_{\gamma} y ds$$

← utile perché lo posso calcolare scegliendo per γ una parametrizzazione comoda, che renda semplice il ds

[Esercizio: fare la sfera parametrizzando la circ. con sin e cos]

→ o — o —