

VETTORE NORMALE E PIANO TANGENTE AD UNA SUPERFICIE

Superficie implicita $\Phi(x, y, z) = 0$ $(x_0, y_0, z_0) \in S$

Vettore normale $\nabla \Phi(x_0, y_0, z_0)$

Piano tangente: piano per (x_0, y_0, z_0) che ha $\nabla \Phi(x_0, y_0, z_0)$ come vettore normale (coeff. a, b, c)

Superficie parametrica $(x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ $(u, v) \in \dots$

Voglio il piano tangente nel p.to con. ad un certo (u_0, v_0) , quindi nel punto $(x_0, y_0, z_0) = (x(u_0, v_0), y(u_0, v_0), z(u_0, v_0))$.

In forma parametrica l'eq. del piano è

$$(x_0, y_0, z_0) + t(x_u, y_u, z_u) + s(x_v, y_v, z_v) \quad \text{piano tangente}$$

Esempio $(u+v, u^2-v^2, uv^3)$ $(u_0, v_0) = (2, 1)$

Il punto corrisp. della sup. è $(3, 3, 2) = (x_0, y_0, z_0)$

$(x_u, y_u, z_u) = (1, 2u, v^3)$ che nel p.to diventa $(1, 4, 1)$

$(x_v, y_v, z_v) = (1, -2v, 3uv^2)$ " " " " $(1, -2, 6)$

Quindi il piano tangente è $(3, 3, 2) + t(1, 4, 1) + s(1, -2, 6)$

Se voglio il vettore normale applico la "formula misteriosa"

$$\begin{pmatrix} i & j & k \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & -2 & 6 \end{pmatrix} \rightsquigarrow (26, -5, -6) \quad \text{vettore normale alla superficie}$$

Back to formula cartesiana

Supponiamo di avere una superficie cartesiana

$$z = x^2 - y^3$$

Voglio piano tangente e vettore normale nel punto $(3, 2, 1) \in S$.

Per il vettore normale, la penso implicita come $\Phi(x, y, z) = z - x^2 + y^3 = 0$.

A quel p.to

vettore normale $= \nabla \Phi = (-2x, 3y^2, 1)$ che nel p.to diventa

$$(-6, 12, 1)$$

Per il piano tangente ho 2 opzioni.

1ª opzione Lo ottengo dal vettore normale: $-6x + 12y + z = 7$
 $-18 + 24 + 1$

2ª opzione riscrivo la sup. in parametrica $(u, v, u^2 - v^3)$
ora mi interessa $(u_0, v_0) = (3, 2)$

$$(x_u, y_u, z_u) = (1, 0, 2u) \quad \text{che nel p.to diventa } (1, 0, 6)$$

$$(x_v, y_v, z_v) = (0, 1, -3v^2) \quad \text{"} \quad (0, 1, -12)$$

Quindi il piano è $(3, 2, 1) + t(1, 0, 6) + s(0, 1, -12)$

Saranno lo stesso piano? $(3+t, 2+s, 1+6t-12s)$ sostituisco

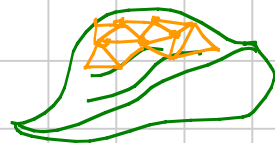
$$-18 - 6t + 24 + 12s + 1 + 6t - 12s = 7 \quad \text{ok.}$$

$$- \quad 0 \quad - \quad 0 \quad -$$

AREA DI UNA SUPERFICIE

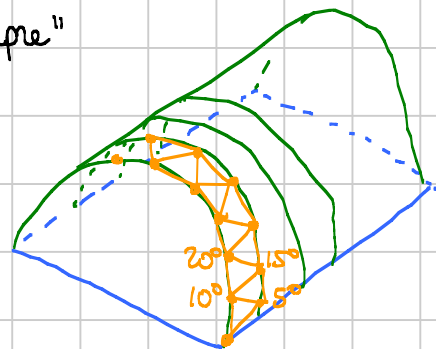
- ① COME NON SI DEFINISCE
- ② COME SI DEFINISCE
- ③ COME SI CALCOLA

- ① Come non si definisce: approssimando la superficie con dei triangolini

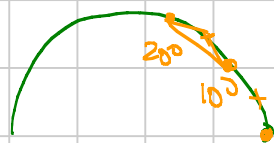


Se in analogia con le curve, definisco l'area come il sup delle aree dei triangolini, quello viene "sempre" uguale a $+\infty$.

Pensiamo ad una tetta cilindrica

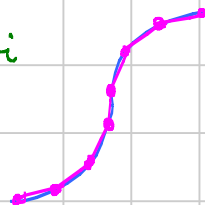


Se prende le arcate molto vicine tra di loro, continuando sempre a sfasare i punti $10^\circ - 20^\circ - 30^\circ$ su una e $5^\circ - 15^\circ - 25^\circ$ sull'altra



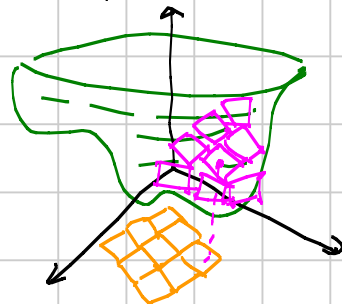
Curve vs Superfici

Su una curva, se prendo pti molto ravvicinati, i segmenti congiungenti approssimano la curva e la loro direzione approssima la retta tangente



Su una superficie, se prendo pti molto ravvicinati, i triangolini che si formano possono non avere nulla a che fare con il piano tangente alla sup.

- ② Molto brutalmente, l'area di una sup. si definisce approssimandola con pezzi di piano tangente. Pensiamo ad una sup cartesiana. Divido la base in tanti rettangolini, ed in ogni rettangolino approx la sup. con un suo piano tangente. Poi si passa al limite



③ Come si calcola Formulaccia nel caso di sup. parametrica

$$(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \quad (u,v) \in A$$

Allora
$$\text{Area}(S) = \iint_A \sqrt{M_1^2(u,v) + M_2^2(u,v) + M_3^2(u,v)} \, du \, dv$$

dove M_1, M_2, M_3 sono i 3 minori (det) 2×2 della matrice

$$\begin{pmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{pmatrix}$$

$$M_1 = y_u z_v - z_u y_v$$

$$M_2 = -x_u z_v + z_u x_v$$

$$M_3 = x_u y_v - y_u x_v$$

Quindi $\sqrt{M_1^2 + M_2^2 + M_3^2}$ è la norma del vettore normale ottenuto dalla formula videniosa a partire dai 2 vettori

(x_u, y_u, z_u) e (x_v, y_v, z_v) che generano il piano tangente.

— 0 — 0 —