

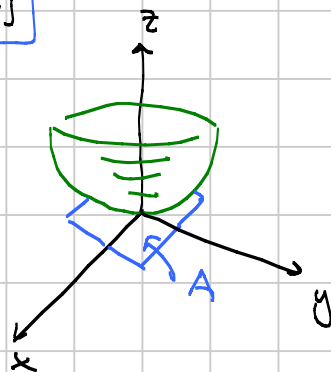
SUPERFICI Superfici in $\mathbb{R}^3 \rightarrow$ cartesiano
 $\rightarrow$ implicito
 $\rightarrow$ parametrico

} modi possibili per descrivere una sup.

Superficie cartesiana $A \subseteq \mathbb{R}^2$, $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, la sup. è il grafico

$$S = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = f(x, y), (x, y) \in A \}$$

Esempio $A = [-1, 1] \times [-1, 1]$ $f(x, y) = x^2 + y^2$
 Ci stiamo limitando alla parte di paraboloide che si proietta sul quadrato A .



Superficie implicita $S \subseteq \mathbb{R}^3$ è il luogo di zeri di una funzione di 3 variabili $\phi(x, y, z)$.

$$S = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \phi(x, y, z) = 0 \}$$

Brutalmente: $\phi(x, y, z) = 0$ è l'equazione della superficie. Implicita vuol dire che non ho ricavato una variabile risp. alle altre.

Esempio $S = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 4 \}$ sfera
 $S = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^4 + z^2 = 4 \}$ sup. di rotazione intorno all'asse y .

Superficie parametrica Dato $A \subseteq \mathbb{R}^2$, date tre funzioni $x(u, v)$, $y(u, v)$ dove variano i parametri $z(u, v)$ in A

funzioni dei 2 parametri

2 parametri

$$S = \{ (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) : (u, v) \in A \}$$

Esempio 1 Un piano in $\mathbb{R}^3$ ha equazione parametrica del tipo
 $(1, 2, -1) + t(0, 1, 1) + s(2, 3, 0)$

$$= (\underbrace{1+2s}_{x(t,s)}, \underbrace{2+t+3s}_{y(t,s)}, \underbrace{-1+t}_{z(t,s)})$$

I parametri posso chiamarli (u, v) oppure (t, s)

Esempio 2 $S = \{ (1+u^2, uv, u^2+v^2) : \underbrace{u^2+v^2 \leq 3}_{(u,v) \text{ stanno in un cerchio}} \}$

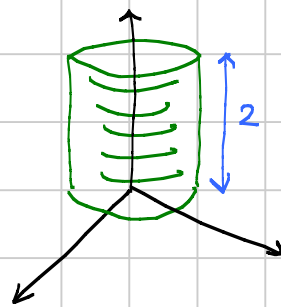
Esempio 3 Tutte le superfici cartesiane sono in realtà sup. parametriche, così come tutte le curve cartesiane sono curve parametriche

$$S = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = f(x, y), (x, y) \in A \} \quad \leftarrow \text{cartesiana}$$

$$= \{ (u, v, f(u, v)) : (u, v) \in A \} \quad \leftarrow \text{stessa in parametrica}$$

$\uparrow$ 3a variabile = f (prime 2)

Esempio 4 Cilindro con asse lungo asse z ,
raggio di base = 1, altezza = 2,
appoggiato sul piano xy (sup. laterale)



→ Cartesiana non lo è

→ implicito $C = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \underbrace{0 \leq z \leq 2}_{\text{limitas.}}, \underbrace{x^2+y^2=1}_{\text{eq. implicita}} \}$

→ parametrica: uso come parametri z e il θ delle coord. polari

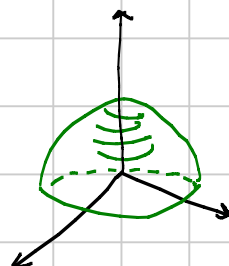
$$C = \{ (\underbrace{\cos \theta, \sin \theta, z}_{\text{parametrizz.}}) : \underbrace{0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq z \leq 2}_{\text{dove variano i parametri}} \}$$

Esempio 5 Semisfera "alta" di raggio 3.

coord. sferiche

dove variano i parametri

$$S = \{ (3 \cos \theta \cos \varphi, 3 \sin \theta \cos \varphi, 3 \sin \varphi) : 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \}$$



PIANO TANGENTE AD UNA SUPERFICIE

VETTORE NORMALE

↑
vettore perpendicolare al piano tangente

Superficie cartesiana

$z = f(x, y)$. Voglio il piano tangente nel punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$

Piano tangente al grafico

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = \underbrace{f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)h + f_y(x_0, y_0)k}_{\text{eq. del piano tangente}} + o(\sqrt{h^2 + k^2})$$

Se pongo $x_0 + h = x$ $h = x - x_0$

$y_0 + k = y$ $k = y - y_0$

e sostituendo tro

$$z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

equazione del piano tangente

$$z = f_x(x_0, y_0)x + f_y(x_0, y_0)y + f(x_0, y_0) - f_x(x_0, y_0)x_0 - f_y(x_0, y_0)y_0$$

Superficie implicita

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \Phi(x, y, z) = 0\}$$

Il luogo di zeri, cioè S , è una sup. di livello, quindi è perpendicolare al gradiente di Φ .

Quindi il piano tangente ad S in un p.to (x_0, y_0, z_0) è il piano che passa per il punto ed è $\perp$ al vettore $\nabla \Phi(x_0, y_0, z_0)$.

Quindi è il piano

$$\langle \nabla \Phi(x_0, y_0, z_0), (x, y, z) \rangle = d$$

dove d è scelto in modo che il piano passi per il punto (x_0, y_0, z_0) .

$$\Phi_x(x_0, y_0, z_0)x + \Phi_y(x_0, y_0, z_0)y + \Phi_z(x_0, y_0, z_0)z = \Phi_x(\cdot)x_0 + \Phi_y(\cdot)y_0 + \Phi_z(\cdot)z_0$$

Esempio 1 Sfera $x^2 + y^2 + z^2 = 5$, punto $(1, 0, 2) \in$ sfera

$$\Phi(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 5 = 0, \quad \nabla \Phi(x, y, z) = (2x, 2y, 2z)$$

Il vettore $(2, 0, 4)$ (ho sostituito $(1, 0, 2)$ nel $\nabla \Phi$) è il vettore $\perp$ alla sfera nel p.to $(1, 0, 2)$. Il piano sarà

$$\underbrace{2x + 4z}_{(2, 0, 4) \text{ come coeff.}} = d \quad \Rightarrow \quad 2x + 4z = 10$$

$\uparrow$ perchè $(1, 0, 2) \in$ piano

l'eq. è $x + 2z = 5$

Esempio 2 Piano tangente al cilindro $x^2 + y^2 = 2$ nel p.to $(1, 1, 3)$

$$\Phi(x, y, z) = x^2 + y^2 - 2, \quad \nabla \Phi(x, y, z) = (2x, 2y, 0)$$

$$\nabla \Phi(1, 1, 3) = (2, 2, 0) \leftarrow \text{vettore perpendicolare al cilindro}$$

Faccio il piano per $(1, 1, 3)$ perpendicolare a $(2, 2, 0)$

$$2x + 2y = 4, \quad \text{cioè } x + y = 2$$

(piano $\perp$ al piano xy).