

Esempio 1

$$\omega = \frac{1}{1+x^2y^2} (y dx + x dy)$$

$$= \frac{y}{1+x^2y^2} dx + \frac{x}{1+x^2y^2} dy$$

$$\gamma(t) = (\underbrace{\cos t}_{x(t)}, \underbrace{t^2 \sin t}_{y(t)}) \quad t \in [0, \pi] \quad \text{Calcolare } \int_{\gamma} \omega$$

1° modo: applico la formula

$$\int_{\gamma} \omega = \int_0^{\pi} \frac{t^2 \sin t}{1 + \cos^2 t \cdot t^4 \sin^2 t} (-\sin t) + \frac{\cos t}{1 + \cos^2 t \cdot t^4 \sin^2 t} (2t \sin t + t^2 \cos t) dt$$

$\uparrow$ $A(x,y)$ $\uparrow$ $\dot{x}$ $\uparrow$ $B(x,y)$ $\uparrow$ $\dot{y}$

= forse si fa.

2° modo: esattezza + primitiva

Provo la chiusura

$$A_y = \frac{(1+x^2y^2) - 2x^2y^2}{(1+x^2y^2)^2} = \frac{1-x^2y^2}{(1+x^2y^2)^2}$$

$$B_x = \dots = \text{stessa cosa}$$

È vero per forza perché è del tipo $C(x,y) dx + C(y,x) dy$
 quindi A_y e B_x vengono la stessa cosa.

Aggiunto dopo video: detto
 così non è vero come fatto
 generale

Quindi è chiusa e la zona di def. è $\mathbb{R}^2$, quindi è esatta.

Una primitiva è

$$F(x,y) = \arctan(xy)$$

Allora $\int_{\gamma} \omega = F(\gamma(\pi)) - F(\gamma(0)) = F(-1,0) - F(1,0) = 0 - 0 = 0.$

3° modo : esattezza + niente primitiva ma cambio curva

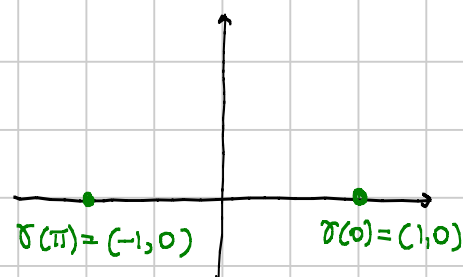
Intanto dimostro l'esattezza mediante chiusura + sempl. comm.

Sostituisco γ con una curva γ_1 più facile con gli stessi estremi.

Per il noto teorema deve essere

$$\int_{\gamma} \omega = \int_{\gamma_1} \omega$$

$\uparrow$ data $\uparrow$ scelgo io con gli stessi estremi



Uso $\gamma_1 = \text{direttissima} = (t, 0) : t \in [-1, 1]$. Questa va quasi bene ma ha il verso opposto. Due modi per rimediare

- cambio il segno alla fine
- considero $(-t, 0) : t \in [-1, 1]$ ← direttissima con verso giusto

$$\int_{\gamma} \omega = - \int_{\gamma_1} \omega = - \int_{-1}^1 0 + t \cdot 0 \, dt = 0$$

$\uparrow$ verso sbagliato $\uparrow$ A(t, 0) $\uparrow$ B(t, 0) $\uparrow$ y'(t)

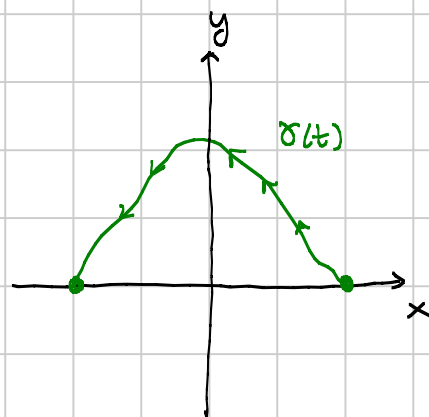
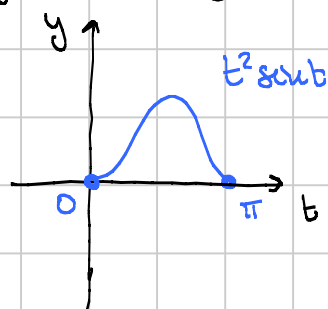
Ulteriore esercizio : capire come è fatta

$$\gamma(t) = (\cos t, t^2 \sin t) \quad t \in [0, \pi]$$

Non è chiusa. È semplice? Sì, perché la prima componente è monotona decrescente, quindi $x(t)$ decresce.

Studio la seconda comp., cioè la

funzione $y(t) = t^2 \sin t$ per $0 \leq t \leq \pi$



Esercizio 2 $\omega = e^{2x+3y} dx + (a e^{2x+3y} + e^{y^2}) dy$

Domanda 1: esistono valori di a per cui è esatta?

Essendo definita su tutto $\mathbb{R}^2$: chiusa $\Leftrightarrow$ esatta

$$A_y = 3e^{2x+3y} \quad B_x = 2a e^{2x+3y} \quad \text{Sono uguali} \Leftrightarrow a = \frac{3}{2}$$

Quindi è esatta solo per $a = \frac{3}{2}$

Domanda 2: nel caso $a = \frac{3}{2}$, calcolare $\int_{\gamma} \omega$ dove

$$\gamma(t) = (e^t - t^2, t^2 - t) \quad t \in [0, 1].$$

1° modo: meglio di no

2° modo: mi serve la primitiva

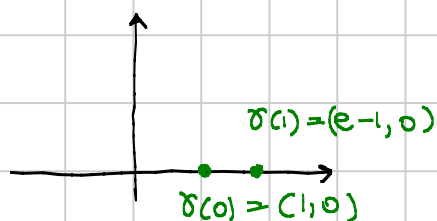
$$F_x = e^{2x+3y} \quad F_y = \frac{3}{2} e^{2x+3y} + e^{y^2}$$

$$F(x, y) = \frac{1}{2} e^{2x+3y} + c(y). \quad \text{Calcolo } c(y) \text{ imponendo } F_y = \dots$$

$$\frac{3}{2} e^{2x+3y} + c'(y) = \frac{3}{2} e^{2x+3y} + e^{y^2} \Rightarrow c'(y) = e^{y^2} \text{ e sono guai}$$

3° modo: cambio la curva con la
direttissima

$$\gamma(t) = (t, 0) \text{ con } t \in [1, e-1] \text{ VERSO OK}$$



$$\int_{\gamma} \omega = \int_{\gamma_1} \omega = \int_1^{e-1} \underbrace{e^{2t}}_{A(t,0)} \cdot \underbrace{1}_{\dot{x}} + \underbrace{\dots}_{B(t,0)} \cdot \underbrace{0}_{\dot{y}} dt = \int_1^{e-1} e^{2t} dt = \text{banale}$$

Back to 2° modo La primitiva è $\frac{1}{2} e^{2x+3y} + c(y)$ dove $c'(y) = e^{y^2}$

Ora

$$\int_{\gamma} \omega = F(\gamma(1)) - F(\gamma(0)) = F(e-1, 0) - F(1, 0) = \frac{1}{2} e^{2e-2} + \cancel{c(0)} - \frac{1}{2} e^2 - \cancel{c(0)}$$

Esempio 3 $(\underbrace{x^2+y}_A) dx + (\underbrace{x+e^y+z^2}_B) dy + (\underbrace{2zy+\sin z}_C) dz = w$

Domanda 1: è esatta? Controllo la chiusura.

$$\left. \begin{array}{lll} A_y = 1 & B_x = 1 & \text{ok} \\ A_z = 0 & C_x = 0 & \text{ok} \\ B_z = 2z & C_y = 2z & \text{ok} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{chiusa ed essendo su } \mathbb{R}^3 \Rightarrow \text{esatta}$$

Domanda 2: trovare la primitiva tale che $F(0,0,0) = 5$

Parto dalla condizione $F_x = x^2 + y$, da cui

$$F(x,y,z) = \frac{1}{3}x^3 + xy + C(y,z).$$

Impongo $F_y = x + e^y + z^2$: ~~$x + C_y(y,z)$~~ = ~~$x + e^y + z^2$~~ , quindi

$$C_y = e^y + z^2 \text{ e quindi } C(y,z) = e^y + z^2 y + C(z)$$

↑
primitiva risp. a y

Quindi finora

$$F(x,y,z) = \frac{1}{3}x^3 + xy + e^y + z^2 y + C(z)$$

Impongo l'ultima condizione

$$F_z = \cancel{2zy} + C_z = \cancel{2yz} + \sin z \Rightarrow C_z = \sin z \Rightarrow C(z) = -\cos z$$

In conclusione $F(x,y,z) = \frac{1}{3}x^3 + xy + e^y + z^2 y - \cos z + \text{costante}$

↑
scelta in modo
che $F(0,0,0) = 5$

Controllare che funzioni,

— o — o —