

Forme differenziali

- Integrali di forme lungo curve
- Una forma ω è esatta, cioè ammette primitiva (potenziale)
 - $\Leftrightarrow \int_{\gamma} \omega = 0$ per ogni curva γ chiusa
 - $\Leftrightarrow \int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_2} \omega$ per ogni γ_1 e γ_2 che hanno gli stessi estremi (stessa partenza e stesso arrivo)
- Se F è una primitiva di ω , allora $\int_{\gamma} \omega = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$
- Esatta $\Rightarrow$ chiusa (sempre)
 - Chiusa $\Rightarrow$ esatta se Ω insieme di definizione è semplicemente connesso (ad esempio stellato)

Esempio di forma che è chiusa ma non esatta

$$\omega = \underbrace{\frac{-y}{x^2+y^2}}_{A(x,y)} dx + \underbrace{\frac{x}{x^2+y^2}}_{B(x,y)} dy$$

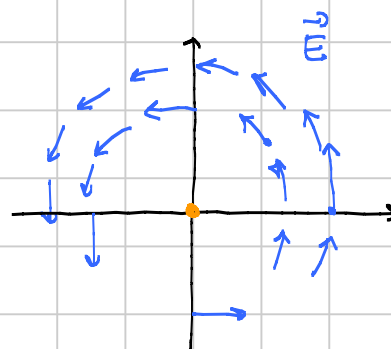
Controllo la chiusura: $A_y = \frac{-1(x^2+y^2) - 2y(-y)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2}$

$B_x = \frac{1(x^2+y^2) - 2x \cdot x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2}$ O.K. è CHIUSA

Zona di definizione è tutto il piano meno l'origine, che non è semplicemente connesso, quindi NON.

$\vec{\Pi} = \frac{1}{x^2+y^2} (-y, x)$

↑
vettore (x,y) ruotato di 90°
in senso antiorario



L'idea è che se giro intorno all'origine ho il vento sempre alle spalle (o davanti a seconda del verso) quindi la forma non può essere esatta.

Formalmente, cerco una curva chiusa γ su cui $\int_{\gamma} \omega \neq 0$.

Ad esempio prendo

$$\gamma(t) = (\underbrace{\cos t}_{x(t)}, \underbrace{\sin t}_{y(t)}) \quad t \in [0, 2\pi]$$

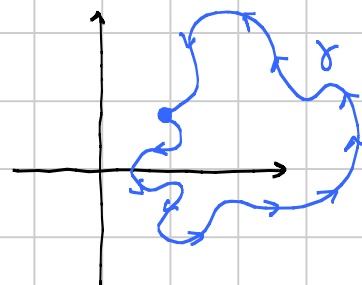
$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \omega &= \int_0^{2\pi} [A(x(t), y(t)) \dot{x}(t) + B(x(t), y(t)) \dot{y}(t)] dt \\ &= \int_0^{2\pi} \left[\underbrace{-\frac{y}{x^2+y^2}}_{\substack{\uparrow \\ -y}} \cdot \underbrace{(-\sin t)}_{\substack{\uparrow \\ \dot{x}(t)}} + \underbrace{\cos t}_{\substack{\uparrow \\ x}} \cdot \underbrace{\cos t}_{\substack{\uparrow \\ \dot{y}(t)}} \right] dt = \int_0^{2\pi} 1 dt = 2\pi \neq 0 \end{aligned}$$

Quindi la forma NON è esatta su tutto il piano meno l'origine.

Oss. Se considero la forma solo (ad esempio) per $x > 0$, allora la zona di def. è sempl. conn. (stellata), quindi essendo chiusa DEVE essere esatta in quella zona.

1ª conseguenza

$\int_{\gamma} \omega = 0$ perché la curva è contenuta in $x > 0$ dove la forma è esatta



2ª conseguenza: per $x > 0$ esiste la primitiva, che è

$$F(x, y) = \arctan \frac{y}{x}$$

è una primitiva nella zona $x > 0$
ma anche nella zona $x < 0$

Infatti

$$F_y = \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \frac{1}{x} = \frac{x^2}{x^2 + y^2} \cdot \frac{1}{x} = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

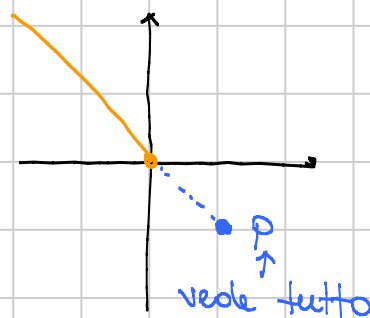
$$F_x = \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \left(-\frac{y}{x^2}\right) = \frac{\cancel{x^2}}{x^2 + y^2} \frac{-y}{\cancel{x^2}} = \frac{-y}{x^2 + y^2}$$

Discorso analogo vale nelle zone $y > 0$ e $y < 0$, dove si verifica che una primitiva è

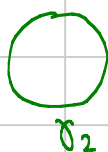
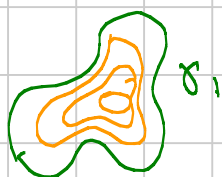
$$F(x, y) = -\arctan \frac{x}{y} \quad [\text{fare la verifica}]$$

Osservazione Prendo una qualunque semiretta che esce dall'origine.

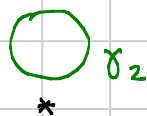
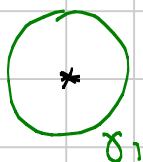
Allora $\mathbb{R}^2$ - semiretta è stellato, quindi semplicemente connesso, e pertanto esiste una primitiva in tutta quella zona.



Def. Due curve chiuse γ_1 e γ_2 si dicono **OMOTOPE** se si possono trasformare l'una nell'altra in maniera continua restando in un certo insieme.



← In $\mathbb{R}^2$ sono omothope



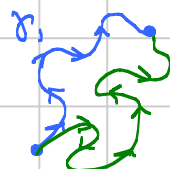
← In $\mathbb{R}^2$ meno punto * non sono omothope

Teorema misterioso Sia ω una forma diff. CHIUSA

(i) Se γ_1 e γ_2 sono 2 curve chiuse omothope, allora $\int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_2} \omega$

(ii) Se γ_1 e γ_2 sono 2 curve con gli stessi estremi e si possono trasformare l'una nell'altra in maniera continua lasciando gli estremi fissi, allora ancora una volta

$$\int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_2} \omega$$

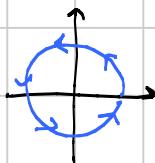


Conseguenza Sia ω la solita (esempio iniziale).

Quanto fa

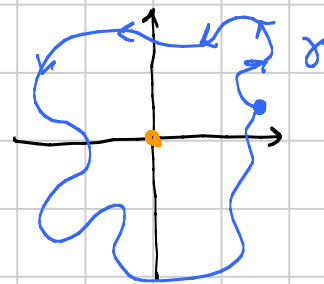
$$\int_{\gamma} \omega = 2\pi$$

perché γ èomotopa a



che abbiamo

calcolato all'inizio. Il raggio non conta.



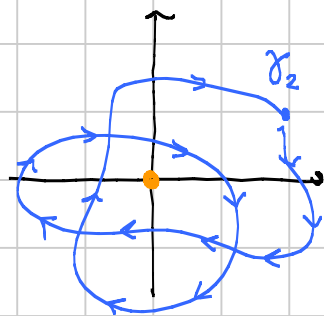
$$\int_{\gamma_2} \omega = -4\pi$$

↑ due giri in senso
inverso

(γ_2 è omotopa a

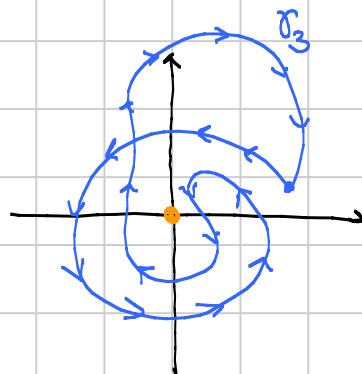


percorsa 2
volte)



$$\int_{\gamma_3} \omega = 0$$

perché γ_3 non gira
intorno al problema, quindi
è omotopa ad una curva
costante o tutta contenuta
nel 1° quadrante.



[Corretto dopo video: trasformato $\oint_{\gamma_2}$ e $\oint_{\gamma_3}$ in $\int_{\gamma_2}$ e $\int_{\gamma_3}$]