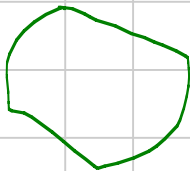
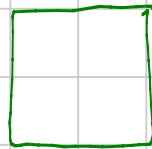


Definizioni Un sottoinsieme $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ (o in $\mathbb{R}^3$) si dice

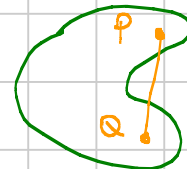
- **CONVESSO** se, comunque prenda due punti P e Q in Ω , si ha che tutto il segmento PQ è contenuto in Ω .



convesso



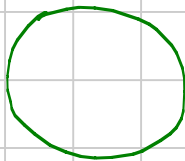
convesso



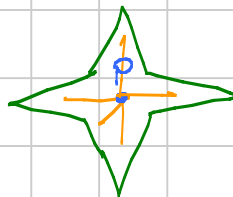
non convesso

- **STELLATO** se esiste $P \in \Omega$ tale che per ogni $Q \in \Omega$ si ha che tutto il segmento PQ è contenuto in Ω .

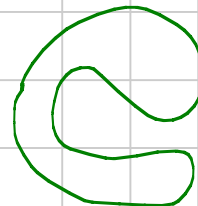
(Brutalmente: esiste un p.to $P \in \Omega$ che vede tutto Ω insieme)



stellato



stellato



non stellato

- **CONNESSO** se "è fatto da un pezzo solo"



connesso

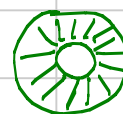


non connesso

- **SEMPLICEMENTE CONNESSO** in $\mathbb{R}^2$ se "non ha buchi"

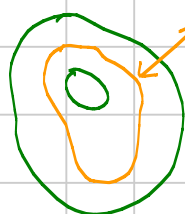
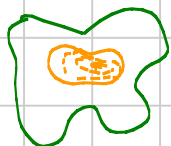


sempl. connesso



NON semplicemente connesso

Brutalmente: ogni curva chiusa in Ω è deformabile con continuità fino a ridurla ad un punto solo.



curva che non si può deformare fino ad un solo punto restando in Ω .

Achtung! Tutto $\mathbb{R}^3$ meno una sfera È semplicemente connesso
Tutto $\mathbb{R}^3$ meno una retta NON è sempl. connesso (una corda intorno alla retta "si incastra").
— o — o —

Relazioni tra le definizioni

CONVESSO $\Rightarrow$ STELLATO $\Rightarrow$ SEMP. CONNESSO $\Rightarrow$ CONNESSO

Non vale nessuna delle implicazioni inverse, come mostrano gli esempi,
— o — o —

Teorema misterioso Sia ω una forma diff. CHIUSA definita su un insieme semplicemente connesso.

Allora ω è esatta, cioè ammette una primitiva.

Conseguenza: modo facile per verificare l'esattezza

Achtung! Se è CHIUSA, ma l'insieme non è sempl. connesso, allora BOH, cioè può essere esatta o no a seconda dei casi.
— o — o —

Esempio 1 $\omega = \underbrace{xy dx}_{A(x,y)} + \underbrace{y^2 dy}_{B(x,y)}$ è esatta?

Controlla la chiusura, cioè $A_y = B_x$

$A_y = x$ $B_x = 0 \Rightarrow$ non chiusa $\Rightarrow$ non esatta

Esempio 2

$$\omega = x dx + y^2 dy$$

$$\gamma(t) = (t^2 + e^t, t^3 - t^4) \quad t \in [0, 1] \quad \text{Calcolare } \int_{\gamma} \omega$$

1° modo: applico la formula

2° modo: provo a vedere se la forma è esatta. Controllo la chiusura:

$$A_y = 0 \quad B_x = 0 \quad \text{☺} \quad \text{è chiusa}$$

Inoltre ω è definita su tutto $\mathbb{R}^2$, che è sempl. connesso ☺

☺ + ☺ $\Rightarrow \omega$ è esatta. Mi serve la primitiva, cioè una F t.c.

$$F_x = x \quad F_y = y^2$$

$$\text{Chiaramente } F(x, y) = \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{3} y^3 \quad (\text{verifica derivando})$$

$$\text{Trovo gli estremi della curva } \gamma(0) = (1, 0) \quad \gamma(1) = (1+e, 0)$$

Quindi

$$\int_{\gamma} \omega = F(\gamma(1)) - F(\gamma(0)) = -F(1, 0) + F(1+e, 0)$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} (1+e)^2 = \frac{1}{2} (-1 + 1 + 2e + e^2) = +e + \frac{1}{2} e^2$$

[Esercizio: controllare che nel 1° modo venga stesso risultato]
— o — o —

$$\text{Esempio 3} \quad \omega = (y^2 + x^2) dx + (2xy + e^y) dy \quad \text{è esatta?}$$

$$\text{Controllo la chiusura: } A_y = 2y \quad B_x = 2y \quad \text{☺}$$

Voglio la primitiva. Iniziamo ad imporre $F_x = y^2 + x^2$. Faccio la primitiva rispetto a x :

$$F(x, y) = y^2 x + \frac{1}{3} x^3 + c(y)$$

Per trovare $c(y)$ impongo

$$F_y = 2xy + e^y$$

$$F_y = \cancel{2xy} + c'(y) = \cancel{2xy} + e^y, \text{ quindi } c'(y) = e^y, \text{ quindi } c(y) = e^y.$$

Quindi una primitiva è $F(x,y) = y^2 x + \frac{1}{3} x^3 + e^y$

Esempio 4 $\omega = \underbrace{xy}_{A} dx + \underbrace{yz}_{B} dy + \underbrace{zx}_{C} dz$ è esatta?

Controllo la chiusura: $A_y = B_x$, $A_z = C_x$, $B_z = C_y$

$A_y = x$ $B_x = 0 \Rightarrow$ non chiusa $\Rightarrow$ non esatta.

Esempio 5 $\omega = \underbrace{yz}_{A} dx + \underbrace{zx}_{B} dy + \underbrace{xy}_{C} dz$

$$\left. \begin{array}{lll} A_y = z & B_x = z & 1^\circ \text{ ok} \\ A_z = y & C_x = y & 2^\circ \text{ ok} \\ B_z = x & C_y = x & 3^\circ \text{ ok} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{è chiusa}$$

La zona di definizione è $\mathbb{R}^3$, che è semplicemente connesso, quindi è esatta. La primitiva è

$$F(x,y,z) = xyz \quad (\text{questa formula da sola mostra l'esattezza})$$

Esempio 6 $\omega = \underbrace{\frac{x}{x^2+y^2}}_A dx + \underbrace{\frac{y}{x^2+y^2}}_B dy$

Controllo la chiusura:

$$A_y = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} \quad B_x = -\frac{y \cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} \quad \text{ok.}$$

Quindi ω è chiusa e definita su $\mathbb{R}^2 \setminus \text{origine}$, che NON è semplicemente connesso, quindi BOH. Opzioni:

→ esibire una primitiva (mostrebbbe che è esatta)

→ esibire una curva γ chiusa t.c. $\int_{\gamma} \omega \neq 0$ (mostrebbbe che non è esatta)

Oss. L'insieme dei pti con $x > 0$ è sempl. connesso, quindi almeno lì la primitiva ci deve essere

La primitiva è $F(x,y) = \frac{1}{2} \log(x^2+y^2)$ e va bene non

solo per $x > 0$, ma per ogni $(x,y) \neq (0,0)$.

— o — o —