

FORME DIFFERENZIALI ESATTE VS CHIUSE

$$\omega = A(x,y)dx + B(x,y)dy \quad \omega = A(x,y,z)dx + B(x,y,z)dy + C(x,y,z)dz$$

Def. Una forma si dice esatta se è gradiente di un potenziale, cioè se esiste una funzione $F(x,y)$ tale che

$$A(x,y) = F_x(x,y)$$

$$B(x,y) = F_y(x,y)$$

Detto $E(x,y) = (A(x,y), B(x,y))$ il vettore associato alla forma si ha

$$E(x,y) = \nabla F(x,y)$$

[In 3 variabili si richiede che esista $F(x,y,z)$ t.c.

$$A = F_x$$

$$B = F_y$$

$$C = F_z$$

Def. Una forma in 2 variabili $\omega = A dx + B dy$ si dice CHIUSA se

$$A_y = B_x$$

$$\text{cioè } \frac{\partial A}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial B}{\partial x}(x,y)$$

Una forma in 3 variabili $\omega = A dx + B dy + C dz$ si dice CHIUSA se

$$A_y = B_x$$

$$A_z = C_x$$

$$B_z = C_y$$

Teorema ESATTA $\Rightarrow$ CHIUSA (purché esistano e siano continue le derivate in questione)

Dim.: **Due variabili** Se $\omega = A dx + B dy$ è esatta, vuol dire che
 $A = F_x$ $B = F_y$

Ma allora

$$A_y = F_{xy} = F_{yx} = B_x, \text{ quindi } \omega \text{ è chiusa}$$

↑
scambio ordine deriv.

Tre variabili Se $\omega = A dx + B dy + C dz$ è esatta, vuol dire che
 $A = F_x$ $B = F_y$ $C = F_z$

Ma allora

$$A_y = F_{xy} = F_{yx} = B_x$$

$$A_z = F_{xz} = F_{zx} = C_x$$

$$B_z = F_{yz} = F_{zy} = C_y$$

— o — o —

Conseguenza: se una forma NON è chiusa, allora NON è esatta
 (se fosse esatta, dovrebbe essere chiusa)

— o — o —

Teorema Sia ω una forma esatta, e sia F un suo potenziale (talvolta si chiama anche primitiva). Allora per ogni curva γ si ha che

$$\int_{\gamma} \omega = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$$

Il lavoro compiuto da un campo conservativo lungo una curva è uguale alla differenza di potenziale tra gli estremi

Dim.: Per semplicità in 2 variabili, sia
 $\omega = A dx + B dy$

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \omega &= \int_a^b [A(x(t), y(t)) \dot{x}(t) + B(x(t), y(t)) \dot{y}(t)] dt && \text{uso che } \omega \text{ è esatta} \\ &= \int_a^b [F_x(x(t), y(t)) \dot{x}(t) + F_y(x(t), y(t)) \dot{y}(t)] dt = \text{(CHAIN RULE)} \end{aligned}$$

$$= \int_a^b \frac{d}{dt} F(x(t), y(t)) dt$$

$$= F(x(b), y(b)) - F(x(a), y(a))$$

$$= F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)).$$

In 3 variabili il discorso è esattamente lo stesso.

— o — o —

Conseguenze

- ① Se la forma è esatta, per fare l'integrale lungo una curva basta sostituire gli estremi nella primitiva
- ② Se la forma è esatta, e 2 curve hanno gli stessi estremi, allora l'integrale è lo stesso
- ③ Se la forma è esatta e la curva è chiusa, allora l'integrale è 0.

Conseguenza ciclistica Se faccio un giro in bici e ho sempre vento contrario, allora il vento non è gradiente di un potenziale.

(Infatti, detto $\vec{E} = (A, B)$ il vento, deve essere $\vec{E} \cdot \vec{\tau} < 0$, ma allora

$$\int_{\gamma} \omega = \int_{\gamma} \vec{E} \cdot \vec{\tau} ds < 0$$

ma essendo γ chiusa se la forma fosse esatta l'integrale dovrebbe essere nullo

— o — o —

Teorema (caratterizzazione delle forme esatte)

Sono fatti equivalenti

(i) ω è esatta

(ii) $\int_{\gamma} \omega = 0$ per ogni curva γ chiusa

(iii) $\int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_2} \omega$ per ogni γ_1 e γ_2 con gli stessi estremi.

Punti facili

(i) $\Rightarrow$ (ii) già visto

(i) $\Rightarrow$ (iii) già visto

(iii) $\Rightarrow$ (ii) Prendo una qualunque γ chiusa $\gamma(a) = \gamma(b) = P$

Prendo la curva $\bar{\gamma}$ che sta sempre in P

È chiaro che γ e $\bar{\gamma}$ hanno gli stessi estremi, quindi per la (iii)

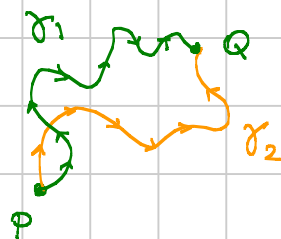
$$\int_{\gamma} \omega = \int_{\bar{\gamma}} \omega = \int_a^b (A(\dots) \underbrace{\dot{x}(t)}_0 + B(\dots) \underbrace{\dot{y}(t)}_0) dt = 0$$

perché $\bar{\gamma}$ sta ferma

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Considero 2 curve γ_1 e γ_2 con gli stessi estremi

Considero una nuova curva $\bar{\gamma}$ che fa γ_1 all'andata e poi γ_2 in senso inverso.

$\bar{\gamma}$ è chiusa, quindi



$$0 = \int_{\bar{\gamma}} \omega = \int_{\gamma_1} \omega + \underbrace{\int_{\gamma_2^{\text{inv}}} \omega}_{\gamma_2 \text{ percorsa in senso inverso}} = \int_{\gamma_1} \omega - \int_{\gamma_2} \omega, \text{ da cui } \int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_2} \omega$$

Per completare la dimostrazione, resta da far vedere che (iii) $\Rightarrow$ (i).

Devo definire la primitiva $F(x,y)$.

Fisso un pto (x_0, y_0) a caso. Poi definisco

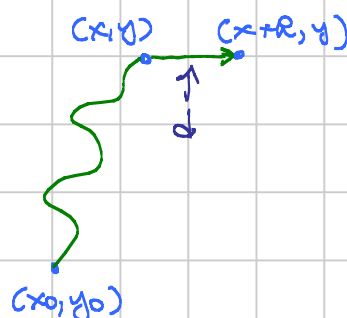
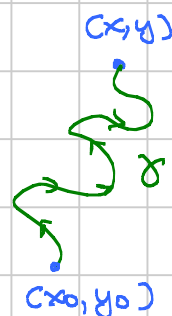
$$F(x,y) = \int_{\gamma} \omega \quad \text{dove } \gamma \text{ è una qualunque curva che va da } (x_0, y_0) \text{ a } (x,y)$$

(non dipende dalla curva per l'ipotesi (iii))

Ora devo dimostrare che $A = F_x$ $B = F_y$

$$F_x(x,y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h, y) - F(x, y)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_{\gamma} \omega \quad (\text{perché l'altro pezzo si cancella})$$



Ora la curva γ (direttissima) si parametrizza come $(x+t, y)$ con $t \in [0, R]$

quindi

$$\int_C \omega = \int_0^2 A(x, y) \underset{\substack{\uparrow \\ x}}{1} dx + B(x, y) \underset{y}{0} dy = \int_0^2 A(x, y) dx$$

Alla fine

$$F_x(x,y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_0^h A(x+t, y) dt = A(x,y)$$

$\downarrow$
 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_0^h A(x+t, y) dt}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} A(x+h, y)$
 $\uparrow$