

FORME DIFFERENZIALI

Una forma differenziale in 2 variabili si presenta nella forma

$$\omega = A(x,y) dx + B(x,y) dy$$

dove $A(x,y)$ e $B(x,y)$ sono funzioni definite su un certo insieme $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$.

In 3 variabili si presenta nella forma

$$\omega = A(x,y,z) dx + B(x,y,z) dy + C(x,y,z) dz$$

Le funzioni $A(x,y)$ e $B(x,y)$ (o le analoghe in 3 variabili) sono dette coefficienti della forma.

La regolarità di una forma diff. (continuità, derivabilità, ecc.) è quella dei coefficienti.

— o — o —

INTEGRALE DI UNA FORMA DIFF. LUNGO UNA CURVA① Notazione

$$\int_{\gamma} \omega$$

Si intende che

- ω è una forma diff. in 2 o 3 variabili
- $\gamma: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ (o in $\mathbb{R}^3$) è una curva.

③-④ Definizione e calcolo

Se $\omega = A(x,y) dx + B(x,y) dy$ e
 $\gamma(t) = (x(t), y(t))$

Allora

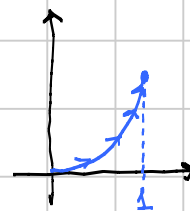
$$\int_{\gamma} \omega = \int_a^b A(x(t), y(t)) \underbrace{x'(t) dt}_{dx} + \int_a^b B(x(t), y(t)) \underbrace{y'(t) dt}_{dy}$$

$$\frac{dx}{dt} = x'(t)$$

Esempio 1 $\omega = \underbrace{x^2 y}_{A(x,y)} dx + \underbrace{(x+2)}_{B(x,y)} dy$ $\gamma(t) = (t, t^2)$ $t \in [0, 1]$

$$\int_{\gamma} \omega = \int_0^1 \underbrace{t^2}_{x^2} \underbrace{t^2}_{y} \underbrace{dt}_{x'(t)dt} + \int_0^1 \underbrace{(t+2)}_{x+2} \underbrace{2t}_{y'(t)dt} dt$$

$$= \int_0^1 (t^4 + 2t^2 + 4t) dt = \text{conficcio.}$$



Esempio 2 $\omega = y dx + x^2 dy$ $\gamma(t) = (t^3, t^2 - t)$ $t \in [0, 2]$

$$\int_{\gamma} \omega = \int_0^2 \left[\underbrace{(t^2 - t)}_y \underbrace{3t^2}_{x'(t)} + \underbrace{t^6}_{x^2} \underbrace{(2t - 1)}_{y'(t)} \right] dt = \int_0^2 (3t^4 - 3t^3 + 2t^7 - t^6) dt$$

= si fa.

— o — o —

Integrali curvilinei di funzioni vs integrali curvilinei di forme

$$\int_{\gamma} f(x,y) ds = \text{integrale di una funzione lungo una curva}$$

$$= \int_a^b f(x(t), y(t)) \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt$$

$$\int_{\gamma} A dx + B dy = \text{integrale di una forma lungo una curva}$$

$$= \int_a^b [A(x(t), y(t)) x'(t) + B(x(t), y(t)) y'(t)] dt$$

Per l'integrale di una funzione lungo una curva

→ se 2 curve percorrono lo stesso sostegno una sola volta, l'integrale diventa lo stesso

→ i pezzi percorsi più volte danno contributi che si sommano

Per l'integrale di una forma

→ se 2 curve percorrono lo stesso sostegno una sola volta e con lo STESSO VERSO DI PERCORRENZA, allora l'integrale è lo stesso

→ tratti percorsi con verso opposto si cancellano.

$$\int_a^b A dx + B dy = \int_a^b [A(x(t), y(t)) \dot{x}(t) + B(x(t), y(t)) \dot{y}(t)] dt$$

$$= \int_a^b \left[A(x(t), y(t)) \frac{\dot{x}(t)}{\sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}} + B(x(t), y(t)) \frac{\dot{y}(t)}{\sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}} \right] \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2} dt$$

Ora $\tau(t) = \left(\frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}, \frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} \right)$ è il **VERSORE** tangente alla curva
 ↓ *vettore di norma 1*

e considero il vettore

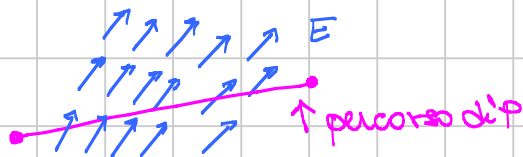
$$E(x, y) = (A(x, y), B(x, y))$$

Quindi l'integrale di sopra è $\int_a^b \underbrace{E \cdot \tau}_{\substack{\uparrow \\ \text{prodotto scalare tra vettore } E \\ \text{ed il versore tangente alla curva}}} ds$

INTERPRETAZIONE FISICA

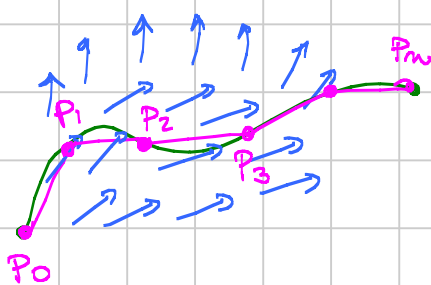
Supponiamo di avere un punto P che si muove di moto uniforme nel piano in cui è definita una forza costante data da un vettore E .

↖ "campo di forze: in ogni p.to del piano assegno un vettore"



$$\text{Lavoro} = \text{Forza} \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ \text{scalare}}}{\text{Spostamento}}$$

Cosa succede se il campo E non è costante e il moto non è uniforme?



Sprezzo il cammino in tanti tratti e in ogni tratto faccio finta che il moto sia uniforme e il vettore sia costante e uso la formula sul singolo tratto.

Quindi

$$\text{Lavoro} = \sum_{k=1}^n E(P_k) \cdot (P_k - P_{k-1}) = \sum_{k=1}^n E(P_k) \cdot \frac{P_k - P_{k-1}}{|P_k - P_{k-1}|} \underbrace{|P_k - P_{k-1}|}_{\text{lungh. del tratto}}$$

Quando la suddivisione diventa fitta si ha che $\frac{P_k - P_{k-1}}{|P_k - P_{k-1}|}$ tende al vettore velocità e la somma tende all'integrale curvilineo di

$$\int_{\gamma} \vec{E} \cdot \vec{\tau} \, ds \quad \text{che è anche} \quad \int_{\gamma} A \, dx + B \, dy$$

Concludendo: se si pensano i coeff. A, B di una forma diff. come componenti di un vettore E , allora

$$\boxed{\int_{\gamma} A \, dx + B \, dy = \text{Lavoro compiuto dalla forza } E \text{ su un punto che percorre la curva } \gamma.}$$

Da qui è ovvio che invertendo il verso d'integrale cambia di segno.