

INTEGRALI CURVILINEI

- ① Come si indicano
- ② Significato geometrico
- ③ Come si definirebbero
- ④ Come si calcolano

① Notazioni

$$\int_{\gamma} f(x,y) ds$$

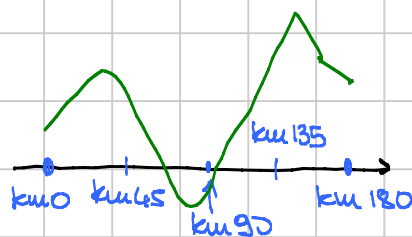
$$\int_{\gamma} f(x,y,z) ds$$

Si intende che

- $\gamma: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ oppure $\gamma: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ è una curva
- $f(x,y)$ oppure $f(x,y,z)$ è una funzione definita almeno sul sostegno della curva
- ds sta ad indicare che si tratta di un integrale curvilineo

② Significato geometrico (ciclistico) Caso di curva nel piano

- γ è una curva nel piano, cioè il percorso della tappa
- $f(x,y)$ rappresenta il grafico che descrive piana, montagna
- si passa al "profilo altimetrico della tappa"



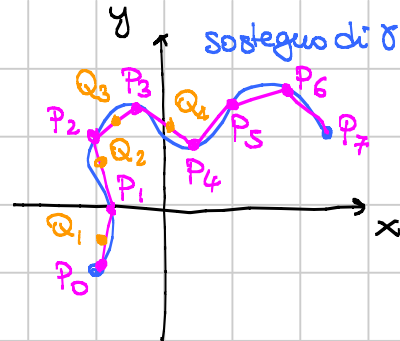
Altezza alla quale si trova il ciclista che percorre la tappa.

Il profilo altimetrico è fatto pensando che la tappa sia percorsa a velocità costante, cioè in ascissa tratti della stessa lunghezza rappresentano tratti di curva di lunghezza uguale.

L'integrale curvilineo è l'integrale del profilo altimetrico,

Il ds sta ad indicare che sto pensando di percorrere la curva a velocità costante.

③ Idea della definizione



→ approssimo la curva con una spezzata

→ in ogni tratto scelgo un punto e calcolo la funzione in quel p.to

→ calcolo la somma di Riemann

$$\sum_{i=1}^n \underbrace{\text{dist}(P_i, P_{i-1})}_{\substack{\text{lungh. tratto} \\ i\text{-esimo}}} \underbrace{f(Q_i)}_{\substack{\text{altezza in un punto} \\ \text{del tratto } i\text{-esimo}}}$$

area di un rettangolo nello spazio che ha come base il segmento $P_i P_{i-1}$ e come altezza il valore della funzione in Q_i

→ "passo al limite" prendendo spezzate sempre più fitte.

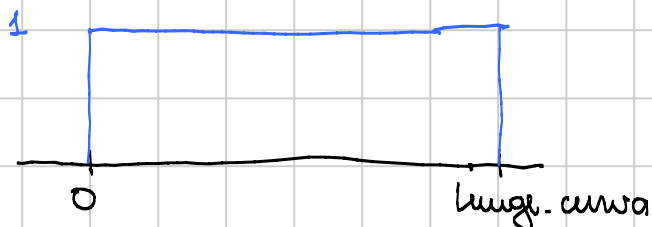
④ Formula per il calcolo

$$\int_{\gamma} f(x, y) ds = \int_a^b f(x(t), y(t)) \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)} dt$$

↑ ↑
componenti della curva

Oss. Se $f(x, y) \equiv 1$, cioè vale sempre 1, allora $\int_{\gamma} 1 ds = \text{lungh}(\gamma)$.

Bruttalmente il profilo altimetrico è un rettangolo di altezza 1 che ha come base la lungh. della curva.



Oss. Se due curve diverse hanno lo stesso sostegno, e lo percorrono una sola volta, allora l'integrale curvilineo (così come la lunghezza) è lo stesso.

Esempio $\gamma(t) = (t^2+1, t^3-1) \quad t \in [0, 2]$

$$f(x, y) = x^2 - y$$

Allora
$$\int_{\gamma} f(x, y) ds = \int_a^b f(x(t), y(t)) \overbrace{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}^{ds} dt$$

$$= \int_0^2 \underbrace{[(t^2+1)^2 - (t^3-1)]}_{x^2 - y} \sqrt{(2t)^2 + (3t^2)^2} dt$$

e questo è in una variabile.
— o — o —

Baricentro di una curva È il punto G di coordinate

$$x_G = \frac{1}{\text{lung}(\gamma)} \int_{\gamma} x ds$$

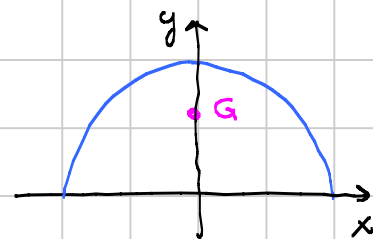
$$y_G = \frac{1}{\text{lung}(\gamma)} \int_{\gamma} y ds$$

Esempio 1 Baricentro di una semicirc. di raggio r

$$\text{lung}(\gamma) = \pi r$$

$$\gamma(t) = (r \cos t, r \sin t)$$

$$\text{con } t \in [0, \pi]$$



Per ragioni di simmetria è evidente che $x_G = 0$ (verificare con l'integrale). Calcolo

$$\int_{\gamma} y ds = \int_0^{\pi} \underbrace{r \sin t}_y \underbrace{\sqrt{r^2 \sin^2 t + r^2 \cos^2 t}}_{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} dt = r^2 \int_0^{\pi} \sin t dt = 2r^2$$

Quindi

$$y_G = \frac{\int \dots}{\text{lung}} = \frac{2r^2}{\pi r} = \frac{2}{\pi} r$$

(ragionevole perché $y \geq \frac{r}{2}$ per $\frac{2}{3}$ del tempo)
60° su 180°

Esempio 2 Elica $(\cos t, \sin t, t)$ $t \in [0, 5\pi]$ (2.5 giri)

Qui bisogna fare il conto (ved. les. prec.)

$$\text{length} = \int_0^{5\pi} \sqrt{2} \, dt = 5\pi\sqrt{2}$$

↑
speed

Se voglio y_G devo calcolare

$$\int_{\gamma} y \, ds = \int_0^{5\pi} \underbrace{\sin t}_y \underbrace{\sqrt{2}}_{\text{speed}} \, dt = \int_{4\pi}^{5\pi} \sin t \cdot \sqrt{2} \, dt = 2\sqrt{2}$$

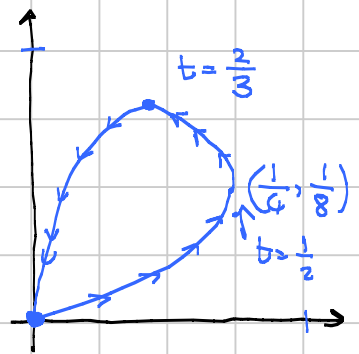
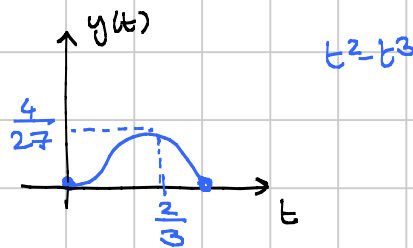
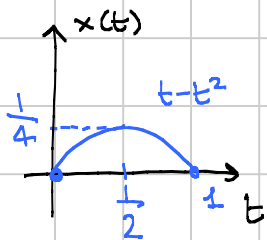
Quindi $y_G = \frac{\int \dots}{\text{length}} = \frac{2\sqrt{2}}{5\pi\sqrt{2}} = \frac{2}{5\pi}$

Analogamente calcolo x_G e z_G .
— o — o —

Esempio 3 (back to lezione 35) $\gamma(t) = (t(1-t), t^2(1-t))$
 $= (t-t^2, t^2-t^3)$ $t \in [0, 1]$

Come capire come è fatto il disegno?

Studio le 2 componenti separatamente



$$2t - 3t^2 = 0 \quad t(2-3t) = 0$$

$$t=0 \quad t = \frac{2}{3}$$

$$\text{per } t = \frac{2}{3} \rightsquigarrow \frac{4}{9} - \frac{8}{27} = \frac{4}{27}$$

- Per t che varia da 0 a $\frac{1}{2}$ $x(t)$ cresce e $y(t)$ cresce, quindi la curva va verso NE
- Per t che varia da $\frac{1}{2}$ a $\frac{2}{3}$ $x(t)$ cala e $y(t)$ cresce, quindi va a NW
- Per t che varia da $\frac{2}{3}$ a 1 $x(t)$ cala e $y(t)$ pure, e torna indietro

— o — o —