

LUNGHEZZA DI UNA CURVA

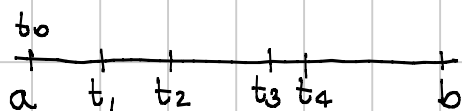
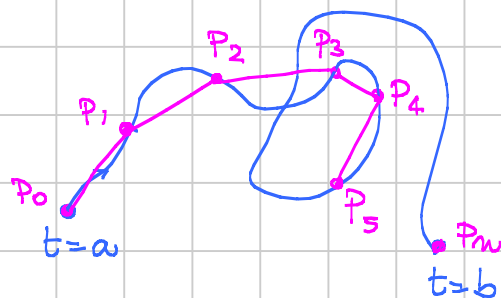
- ① Come si definisce
- ② Come si calcola

Definizione $\leadsto$ approssimanti poligionali

$$\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2 \text{ (o in } \mathbb{R}^3 \text{)}$$

- ① Suddivido in $[a, b]$ in tanti intervalli

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = b$$



- ② Poi fotografo la curva all'istante t_i .
Poi ho $P_i = \gamma(t_i)$

- ③ Approssimo la curva con la spezzata $P_0 P_1 P_2 \dots P_n$ di cui posso calcolare la lunghezza sommando le lunghezze dei segmenti.
Intuitivamente la curva è più lunga di tutte le spezzate così costruite

- ④ Si definisce lunghezza della curva il sup delle lunghezze di tutte le possibili poligoni.

— o — o —

Formula per il calcolo Se le derivate $\dot{x}(t)$ e $\dot{y}(t)$ (ed eventualmente $\dot{z}(t)$) esistono e sono continue, allora

$$\text{Lunghezza} = \int_a^b \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)} dt$$

Interpretazioni brutali

- ① Dal p.to di vista fisico abbiamo che $\text{lunghezza} = \text{integrale}$ della speed rispetto al tempo, che è la versione evoluta di $\text{spazio} = \text{velocità} \cdot \text{tempo}$
- ② Dal punto di vista più matematico, torniamo alla spezzata $P_0 P_1 P_2 \dots P_n$ con $P_i = \gamma(t_i) = (x(t_i), y(t_i))$. Allora

$$\begin{aligned} P_i P_{i+1} &= \text{dist}(P_{i+1}, P_i) = \sqrt{(x(t_{i+1}) - x(t_i))^2 + (y(t_{i+1}) - y(t_i))^2} \\ &= \sqrt{(t_{i+1} - t_i)^2 \dot{x}(c_i)^2 + (t_{i+1} - t_i)^2 \dot{y}(d_i)^2} \\ &= (t_{i+1} - t_i) \sqrt{\dot{x}(c_i)^2 + \dot{y}(d_i)^2} \end{aligned}$$

Analisi 1!
teo. Lagrange

dove c_i e d_i stanno tra t_i e $t_{i+1} > t_i$

Quindi quando sommiamo le lunghezze

$$\begin{aligned} \text{lunghez. spezzata} &= \sum_{i=0}^{n-1} \text{dist}(P_{i+1}, P_i) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} (t_{i+1} - t_i) \sqrt{\dot{x}(c_i)^2 + \dot{y}(d_i)^2} \\ &= \text{Somma di Riemann per } \int_a^b \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt \end{aligned}$$

Fatto 1 Se due curve hanno lo stesso sostegno non è detto che abbiano la stessa lunghezza (dipende per lo meno da quante volte è stato percorso ogni tratto del sostegno)

Fatto 2 Se due curve percorrono lo stesso sostegno una sola volta, allora hanno la stessa lunghezza,

CURVE CARTESIANE

Sono curve del tipo

$$(t, f(t)) \quad \text{oppure} \quad (g(t), t)$$

cioè una delle componenti è uguale a t .

Queste non possono essere chiuse e sono sempre semplici perché almeno una delle componenti è iniettiva.

Il loro sostegno è un tratto del grafico di

$$y = f(x)$$

$$(t, f(t))$$

$$x = g(y)$$

$$(g(t), t)$$

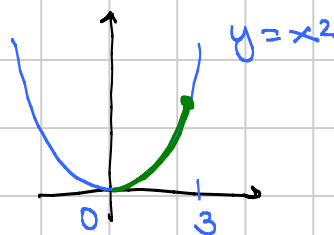
La formula per la lunghezza diventa

$$\int_a^b \sqrt{1 + \dot{f}^2} dt$$

$$\int_a^b \sqrt{1 + \dot{g}^2} dt$$

Esempio 1 lunghezza del tratto di parabola da $x=0$ a $x=3$.

Scegliere la curva cartesiana



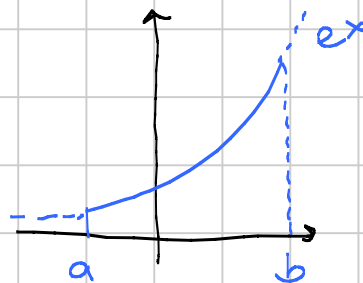
$$(t, t^2) \quad \text{con} \quad t \in [0, 3]$$

$$\text{lunga} = \int_0^3 \sqrt{\underbrace{1^2}_{x'^2} + \underbrace{(2t)^2}_{y'^2}} dt = \int_0^3 \sqrt{1 + 4t^2} dt = \text{analisi 1}$$

Esempio 2 lung. di un tratto di esponenziale

$$\gamma(t) = (t, e^t) \quad t \in [a, b]$$

$$\text{lunga} = \int_a^b \sqrt{\underbrace{1}_{x'^2} + \underbrace{e^{2t}}_{y'^2}} dt$$



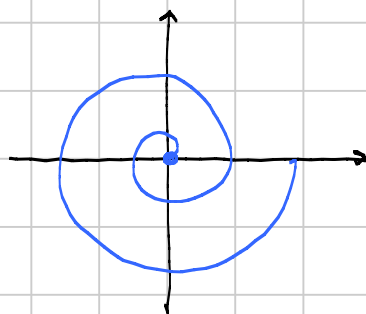
e questo si fa con la sostituzione $e^{2t} = y$... analisi 1.

— 0 — 0 —

CURVE IN COORDINATE POLARI

Invece di dare $(x(t), y(t))$, si assegnano $\rho(t)$ e $\theta(t)$.

Esempi $\rho(t) = t \quad t \geq 0$
 $\theta(t) = t$



spirale "uscende"

La stessa in coordinate cartesiane sarebbe

$$(x(t), y(t)) = (t \cos t, t \sin t)$$

$$\rho \cos \theta, \rho \sin \theta$$

Questa è semplice e la semplicità si vede

- malissimo in cartesiane
- molto bene in polari ($\rho(t)$ è strett. crescente)

Achtung! $\rho(t)$ monotono basta per dedurre la semplicità,
 $\theta(t)$ monotono non basta!!! Basta pensare a $\rho(t)=1, \theta(t)=t$

Lunghezza in coordinate polari

$$x = \rho \cos \theta$$

$$x(t) = \rho(t) \cos \theta(t)$$

$$y = \rho \sin \theta$$

~

$$\dot{x} = \dot{\rho} \cos \theta + \rho (-\sin \theta) \dot{\theta}$$

$$\dot{y} = \dot{\rho} \sin \theta + \rho \cos \theta \dot{\theta}$$

$$\begin{aligned} \dot{x}^2 + \dot{y}^2 &= \dot{\rho}^2 \cos^2 \theta + \rho^2 \sin^2 \theta \dot{\theta}^2 - 2\rho \dot{\rho} \dot{\theta} \cos \theta \sin \theta \\ &\quad + \dot{\rho}^2 \sin^2 \theta + \rho^2 \cos^2 \theta \dot{\theta}^2 + 2\rho \dot{\rho} \dot{\theta} \cos \theta \sin \theta \\ &= \dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\theta}^2 \end{aligned}$$

Formula per la lunghezza

$$\text{Lunghezza} = \int_a^b \sqrt{\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\theta}^2} dt$$

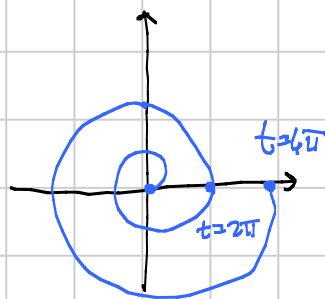
Esempio 1 Spirale

$$\rho(t) = t$$

$$t \in [0, 4\pi]$$

$$\theta(t) = t$$

$$\text{lunghezza} = \int_0^{4\pi} \sqrt{\underbrace{1}_{\dot{\rho}^2} + \underbrace{t^2}_{\rho^2 \dot{\theta}^2}} dt = \text{si fa}$$



Esempio 2

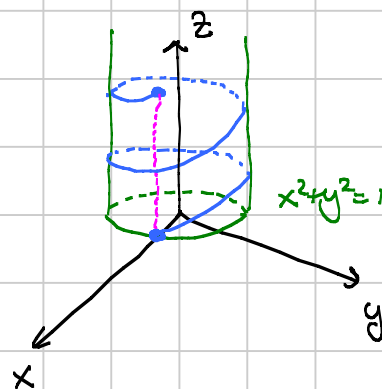
Nello spazio

$$\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t) \quad t \in [0, 4\pi]$$

ELICA CILINDRICA

Chiusa NO, semplice SI

$$\begin{aligned} \text{lunghezza} &= \int_0^{4\pi} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} dt \\ &= \int_0^{4\pi} \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + 1} dt \\ &= \int_0^{4\pi} \sqrt{2} dt = 4\pi\sqrt{2} \end{aligned}$$



Questa stessa curva, in coordinate cilindriche, diventa

$\rho(t) = 1$
restare sul
cilindro

$\theta(t) = t$
girare

— o — o —

$z(t) = t$
salire