

CURVE

Def. Una curva nel piano è una qualunque funzione $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$
 " " nello spazio " " " $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$

Esempi $\gamma(t) = (\underbrace{t^2+1}_{x(t)}, \underbrace{3t-2}_{y(t)}) \quad t \in [0, 3]$
 $[a, b]$

Per ogni $t \in [0, 3]$ ottengo un p.to del piano

$$\gamma(t) = (t^2, \sin t, e^t) \quad t \in [-1, 1] \quad \text{curva nello spazio}$$

$(x(t), y(t), z(t))$

Brutalmente: una curva rappresenta un p.to che si muove nel piano o nello spazio; $\gamma(t)$ dice dove si trova il p.to al tempo t .

Def. Si dice sostegno della curva l'immagine della curva stessa, cioè la traiettoria percorsa dal p.to.

Achtung! Lo stesso sostegno può essere percorso in vari modi.

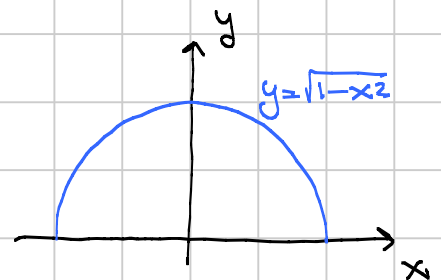
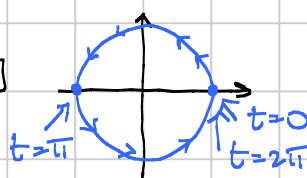
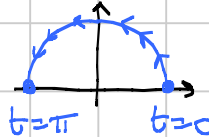
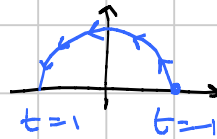
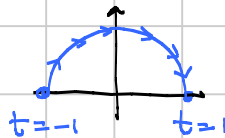
Esempio 1

$$\gamma_1(t) = (t, \sqrt{1-t^2}) : t \in [-1, 1]$$

$$\gamma_2(t) = (-t, \sqrt{1-t^2}) : t \in [-1, 1]$$

$$\gamma_3(t) = (\cos t, \sin t) : t \in [0, \pi]$$

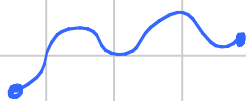
$$\gamma_4(t) = (\cos t, \sin t) : t \in [0, 2\pi]$$



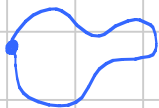
$\gamma_S(t) = (\cos t, \sin t) \quad t \in [0, 4\pi]$
circonferenza con
2 giri.

Def. Una curva si dice

- chiusa se $\gamma(a) = \gamma(b)$
- semplice se non ritorna mai su se stessa, tranne al più il fatto che $\gamma(a) = \gamma(b)$



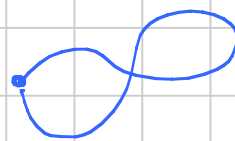
semplice,
NON chiusa



semplice e
chiusa



non chiusa
non semplice



chiusa,
NON semplice

Def. Sia $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ (o in $\mathbb{R}^3$). Si dice vettore tangente il vettore

$$\gamma'(t) = (x'(t), y'(t))$$

posto che le derivate esistano. [Si intende che $\gamma(t) = (x(t), y(t))$]

Achtung! Occhio alla differenza tra

- VELOCITY, cioè il vettore $\gamma'(t) = (x'(t), y'(t))$
- SPEED, cioè il numero dato dalla norma della velocity, cioè

$$\|\dot{\gamma}(t)\| = \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}$$

Def. La retta tangente ad una curva in un p.to è la retta che passa per il punto e ha come direzione la velocity nel p.to stesso.

Esempio 1 $\gamma(t) = (\cos t, \sin t) \quad t \in [0, 2\pi]$

$x(t)$ $y(t)$

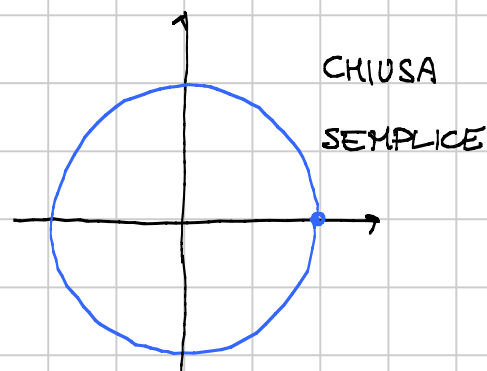
Il sostegno è la circonferenza $x^2 + y^2 = 1$.

La velocity è il vettore

$$\dot{\gamma}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t)) = (-\sin t, \cos t)$$

La speed è

$$\|\dot{\gamma}(t)\| = [\dot{x}^2 + \dot{y}^2]^{1/2} = [\sin^2 t + \cos^2 t]^{1/2} = 1$$



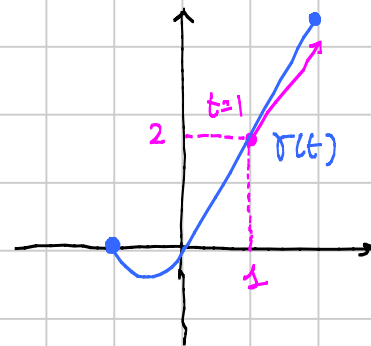
SPEED costante

VELOCITY NO

Esempio 2 $\gamma(t) = (t, t^2 + t)$ $t \in [-1, 2]$

$\times$ $x^2 + x$

La curva percorre il tratto della parabola
 $y = x^2 + x$ con $x \in [-1, 2]$



Calcolare la retta tangente nel p.to corrispondente a $t=1$

$$\gamma(1) = (1, 2)$$

$$\dot{\gamma}(t) = (1, 2t+1) \quad \dot{\gamma}(1) = (1, 3)$$

È la retta che passa per $(1, 2)$ con direzione $(1, 3)$, cioè
 in parametrica $(1, 2) + t(1, 3)$

La curva NON è chiusa, ma è semplice.

Come capisco se una curva è chiusa o no? Banale, sostituisco gli estremi

Come capisco se una curva è semplice o no?

Ci sono varie strategie.

① Se almeno una delle 2 componenti è ~~iniettiva~~ ^{iniettiva}, allora la curva è per forza semplice.

Esempi $\gamma(t) = (\underbrace{t^3 + t}_{x(t)}, \arctan t - \cos t)$ $t \in [-100, 100]$

$x(t)$ è INIETTIVA perché è strett.

crescente in quanto $\dot{x}(t) = 3t^2 + 1 > 0$

$\Rightarrow$ curva semplice

$$\gamma(t) = (\underbrace{t + \cos t}_{x(t)}, t - \sin t + t^2)$$

$$t \in [0, 2\pi]$$

$x(t)$ è iniettiva

$\dot{x}(t) = 1 - \sin t \geq 0$ con annullamento sporadico

$\Rightarrow x(t)$ è strettamente crescente $\Rightarrow$ iniettiva

② Posso provare ad impostare il sistema $\begin{cases} x(t) = x(s) \\ y(t) = y(s) \end{cases}$

e sperare che abbia come soluzioni solo $t=s$ oppure gli estremi.

Esempio $\gamma(t) = (t(t-1), t^2(t-1)) \quad t \in [0,1]$

È chiusa? $\gamma(0) = (0,0)$, $\gamma(1) = (0,0) \Rightarrow$ sì chiusa

È semplice? Le due componenti non sono iniettive (hanno lo stesso valore agli estremi).

Impongo il sistema

$$\begin{cases} x(t) = x(s) \\ y(t) = y(s) \end{cases} \quad \begin{cases} t(t-1) = s(s-1) \\ t^2(t-1) = s^2(s-1) \end{cases} \quad \begin{cases} t^2 - t = s^2 - s \\ t^3 - t^2 = s^3 - s^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} t^2 - s^2 = t - s \\ t^3 - s^3 = t^2 - s^2 \end{cases} \quad \begin{cases} (t-s)(t+s) = t-s \\ (t-s)(t^2 + ts + s^2) = (t-s)(t+s) \end{cases}$$

La 1ª eq. la posso scrivere come $(t-s)(t+s-1) = 0$

$$\begin{array}{ccc} & \nwarrow & \searrow \\ & t=s & t+s=1 \end{array}$$

è quello che voglio
dedurre

Supponiamo che $t \neq s$, allora posso dividere sopra e sotto e resta

$$\begin{cases} t+s=1 \\ t^2 + ts + s^2 = t+s \end{cases} \quad \begin{array}{l} s = 1-t \\ \cancel{t^2} + t - \cancel{t^2} + t^2 - 2t + 1 = 1 \end{array} \quad t^2 - t = 0$$

$$\begin{array}{lll} t(t-1) = 0 & t=0 & \text{oppure } t=1 \\ & s=1 & s=0 \end{array}$$

Quindi partendo dal sistema

$$\begin{cases} x(t) = x(s) \\ y(t) = y(s) \end{cases}$$

abbiamo trovato come soluzioni

- $t=s$
- $t=0$ e $s=1$, oppure $t=1$ e $s=0$.

Quindi la curva è semplice.

— o — o —