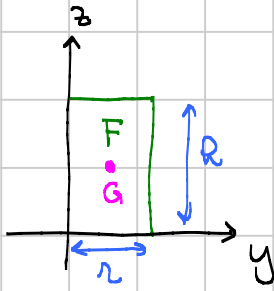
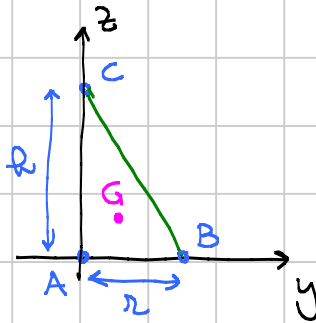


Esempi classici di solidi di rotazione**CILINDRO**

$$\begin{aligned} \text{Vol} &= \text{Area}(F) \cdot 2\pi y_G \\ &= rR \cdot 2\pi \frac{r}{2} = \pi r^2 R \end{aligned}$$

CONO

Si verifica (fare per esercizio) che il baricentro del triangolo con vertici in A, B, C è dato da

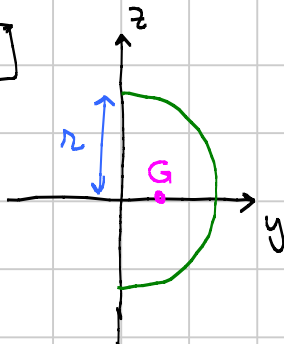
$$G = \frac{A+B+C}{3}$$

quindi le coord. di G sono la media delle coordinate di A, B, C

Nell'esempio si ha

$$G = \left(\frac{0+r+0}{3}, \frac{0+0+R}{3} \right) = \left(\frac{r}{3}, \frac{R}{3} \right)$$

$$\text{Vol}(\text{cono}) = \text{Area}(F) \cdot 2\pi y_G = \frac{1}{2} rR \cdot 2\pi \frac{r}{3} = \frac{1}{3} \pi r^2 R$$

SFERA

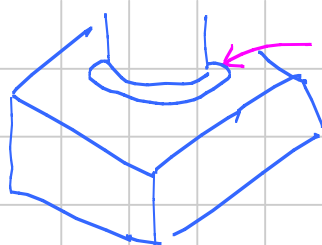
Dal calcolo fatto nella les. sui baricentri abbiamo che

$$G = \left(\frac{4}{3\pi} r, 0 \right)$$

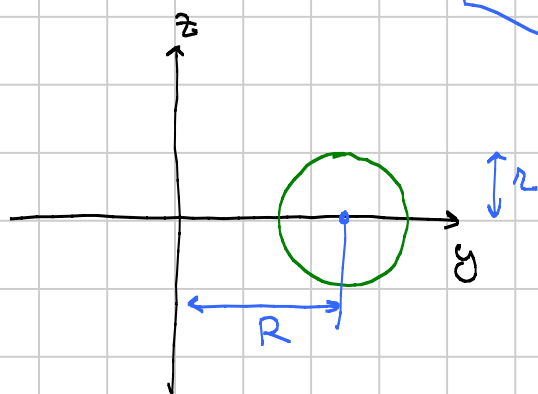
$$\text{Vol} = \text{Area}(F) \cdot 2\pi y_G$$

$$= \frac{1}{2} \pi r^2 \cdot 2\pi \frac{4}{3\pi} r = \frac{4}{3} \pi r^3$$

TORO



THOROS

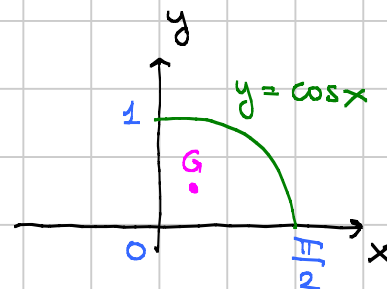


$$Vol = Area(F) \cdot 2\pi y_G$$

$$= \pi r^2 \cdot 2\pi R = 2\pi^2 r^2 R$$

— o — o —

Esempio Volume che si ottiene ruotando intorno asse x o asse y



$$Area(F) = 1$$

$$\iint_F x \, dx \, dy = \int_0^{\pi/2} dx \int_0^{\cos x} dy \, x = \int_0^{\pi/2} x \, dx \int_0^{\cos x} dy = \int_0^{\pi/2} x \cos x \, dx$$

$$= [x \sin x]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \sin x \, dx = \frac{\pi}{2} - 1 = x_G \quad (\text{perché Area} = 1)$$

$$\iint_F y \, dx \, dy = \int_0^{\pi/2} dx \int_0^{\cos x} y \, dy = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \cos^2 x \, dx = \frac{\pi}{8} = y_G$$

Se ruoto intorno asse y : $Vol = Area \cdot 2\pi x_G = 2\pi \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right)$

Se ruoto intorno asse x : $Vol = Area \cdot 2\pi y_G = 2\pi \cdot \frac{\pi}{8} = \frac{\pi^2}{4}$

Altra domanda: quando ruoto intorno asse y , chi è il baricentro del solido S ?

Bisogna fare il conto

$$(x_G, y_G, z_G)$$



per simmetria

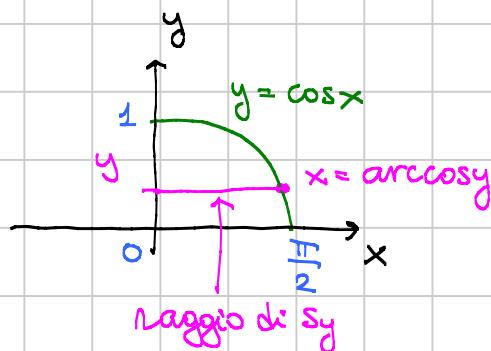
$$y_G = \frac{1}{\text{vol}(S)} \iiint_S y \, dx \, dy \, dz$$

↑
già fatto

$$\iiint_S y \, dx \, dy \, dz = \int_0^1 dy \iint_{S_y} y \, dx \, dz = \int_0^1 y \, \text{Area}(S_y) \, dy$$

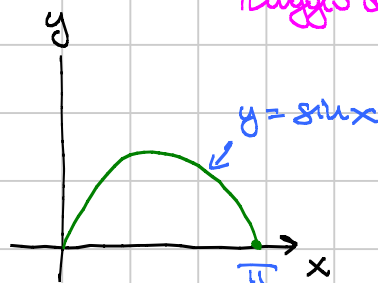
S_y è un cerchio di raggio $\arccos y$

$$= \int_0^1 y \cdot \pi \arccos^2 y \, dy = \text{contoso} \dots$$



Esempio Ruoto intorno
all'asse x di 180° .

Volume e baricentro di S



$$\text{Vol} = \frac{1}{2} \pi \int_0^\pi \sin^2 x \, dx = \frac{1}{2} \pi \frac{\pi}{2} = \frac{\pi^2}{4}$$

↑
formula
di volume

↑
solo
metà
rotazione

Baricentro di $S = (x_G, y_G, z_G)$

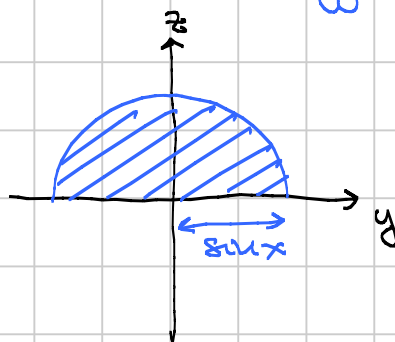
↑
0

$$\begin{aligned} \iiint_S x \, dx \, dy \, dz &= \int_0^\pi dx \iint_{S_x} x \, dy \, dz = \int_0^\pi x \, dx \iint_{S_x} dy \, dz \\ &= \int_0^\pi x \, \text{Area}(S_x) \, dx = \int_0^\pi x \cdot \frac{1}{2} \pi \sin^2 x \, dx \rightarrow \text{SI FA} \end{aligned}$$

semicirc. di raggio $\sin x$

$$\iiint_S z \, dx \, dy \, dz = \int_0^\pi dx \underbrace{\iint_{S_x} z \, dy \, dz}_{\text{va fatto}}$$

$S_x = \text{semicirchio di raggio } \sin x$



Quindi

$$\iint_{S_x} z \, dx \, dy = \int_0^{\sin x} \rho \, d\rho \int_0^\pi d\theta \underbrace{\rho \sin \theta}_{z} \underbrace{\rho}_J \quad \text{e da qui si fa.}$$

— 0 — 0 —

Esercizio Intersezione di 2 cilindri

$$S = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \underbrace{x^2 + z^2 \leq 1}_{\substack{\text{cilindro con} \\ \text{asse lungo} \\ \text{asse } y}}, \underbrace{y^2 + z^2 \leq 1}_{\substack{\text{cilindro con} \\ \text{asse lungo} \\ \text{asse } x}} \}$$

Voglio $\text{Vol}(S)$. Lo calcolo per sezioni. Devo capire

- $z_{\min}$ e $z_{\max}$: ± 1
- S_z come è fatto

$$\text{Vol}(S) = \int_{-1}^1 dz \iint_{S_z} dx \, dy = \int_{-1}^1 \text{Area}(S_z) \, dz$$

Cui è S_z ? Ogni cilindro, sezionato ad altezza z , diventa una striscia di opportuno spessore.

L'intersezione di 2 strisce fa un quadrato. Seme il lato ..., che è $2\sqrt{1-z^2}$.

Quindi

$$\text{Area}(S_z) = 4(1-z^2)$$

da cui

$$\text{Vol}(S) = \int_{-1}^1 4(1-z^2) \, dz \quad \text{e questo si fa}$$

— 0 — 0 —

Hard

Cosa succede se aggiungo il terzo cilindro nell'altra direzione?

— 0 — 0 —

